TUYỂN TẬP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

(ĐÁP ÁN CHI TIẾT)

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỞNG

Toàn bộ tài liệu của thầy ở trang:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HỌ VÀ TÊN: ....

LỚP :...

TRƯỜNG :...

HÀ NỘI, 8/2013

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Toàn bộ tài liệu luyện thi đại học môn toán của thầy Lưu Huy Thưởng:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

PHẦN I VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng bằng cách xác định vectơ pháp tuyến.

- Vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là vec-tơ có giá vuông góc với mặt phẳng đó.
- Một mặt phẳng có vô số các vec-tơ pháp tuyến (các vec-tơ này có giá song song hoặc trùng nhau).
- Để xác định vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng chúng ta có 1 số cách sau:

+ **Xác định trực tiếp:** Dựa vào mối quan hệ song song, vuông góc giữa các yếu tố: mặt phẳng – mặt phẳng, đường thẳng – mặt phẳng…

+ **Xác định gián tiếp:** Tìm 2 vec-tơ không cùng phương cùng vuông góc với vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

BÀI TẬP

HT 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho mặt phẳng $(P): x+2y-3z+1=0$ và điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P)

Giải

Ta có: $(Q)//(P)$ nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng : $(Q): x+2y-3z+D=0,\ (D\neq 1)$

Ta có : (Q) qua A nên suy ra : $D=3$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(Q): x+2y-3x+3=0$

HT 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$ Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Giải

Ta có, $(P)\perp d$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng : $x-2y+z+D=0$

Mặt khác, (P) qua A nên suy ra $D=0$.

Vậy, phương trình mặt phẳng $x-2y+z=0$

HT 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho 3 điểm không thẳng hàng $A(1;2;-1), B(-1;0;2), C(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;3), \overrightarrow{AC}=(1;-3;2)$

Mặt phẳng (ABC) có một vec-tơ pháp tuyến: $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=(5;7;8)$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(ABC): 5(x-1)+7(y-2)+8(z+1)=0 \Leftrightarrow 5x+7y+8z-11=0$

HT 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$, cho hai điểm A(2;4;1), B(–1;1;3) và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$

Gọi $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) với $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$

Ta có: $\begin{cases} A,B\in(Q) \\ (Q)\perp(P)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}$

Suy ra, (Q) có một vec-tơ pháp tuyến : $\vec{n}_Q=\left[\vec{n}_P,\overrightarrow{AB}\right]=(0;-8;-12)\neq\vec{0}$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(Q): 2y+3z-11=0$.

HT 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3), B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1;3;2)$, d có VTCP $\vec{u} = (1;2;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPHƯƠNG TRÌNH của (P) $\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BA} \\ \vec{n} \perp \vec{u} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (P) có một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BA}, \vec{u}\right] = (-10;4;-1)$

$\Rightarrow$ Phương trình của (P): $10x - 4y + z - 19 = 0$.

HT 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$; $d_2: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng $d_1; d_2$

Giải

Gọi là $\vec{n}$ vec-tơ pháp tuyến của (P)

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của $d_1; d_2$ với $\vec{u}_1 = (1;-1;2); \vec{u}_2 = (-1;2;1)$

Gọi A là giao điểm của $d_1; d_2$. Suy ra, $A(1;1;1)$

Ta có: $\begin{cases} (P) \supset d_1 \\ (P) \supset d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$

Suy ra, (P) có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-5;-3;1)$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(P): -5x - 3y + z + 7 = 0$

HT 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng song song d_1 và d_2 có phương trình: $(d_1); \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$, $(d_2): \dfrac{x-4}{6} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{z-3}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và d_2.

Giải

Ta có: $A(1;-1;2) \in d_1; B(4;1;3) \in d_2$, $\overrightarrow{AB} = (3;2;1)$

Gọi $\vec{u}_1$ là vec-tơ chỉ phương của d_1

Gọi $\vec{n}$ là vec-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có, (P) chứa hai đường thẳng song song d_1, d_2 nên (P) có 1 vec-tơ pháp tuyến: $\vec{n} = [\vec{u}_1; \overrightarrow{AB}] = (1;1;-5)$

Suy ra, phương trình mặt phẳng $(P): x + y - 5z + 10 = 0$

HT 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M(1; –1; 1) và hai đường thẳng $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3}$ và $(d_2): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{5}$. Chứng minh rằng điểm M, d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Giải

Ta có: d_1 qua $M_1(0;-1;0)$ và có $\vec{u}_1 = (1;-2;-3)$, d_2 qua $M_2(0;1;4)$ và có $\vec{u}_2 = (1;2;5)$.

Suy ra : $[\vec{u}_1;\vec{u}_2] = (-4;-8;4) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (0;2;4) \Rightarrow [\vec{u}_1;\vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Rightarrow d_1, d_2$ đồng phẳng.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1, d_2 $\Rightarrow$ (P) có VTPHƯƠNG TRÌNH $\vec{n} = (1;2;-1)$ và đi qua M_1 nên có phương trình $x + 2y - z + 2 = 0$. Kiểm tra thấy điểm $M(1;-1;1) \in (P)$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

HT 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

Giải

Ta có: $(P)//(Q)$ Suy ra, phương trình mặt phẳng $(Q): x + y + z + D = 0$ $(D \neq -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính: $R = 5$

(Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi: $d_{(I;(Q))} = R \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{3}} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 5\sqrt{3} \\ D = -5\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(Q_1): x + y + z + 5\sqrt{3} = 0; (Q_2): x + y + z - 5\sqrt{3} = 0$

HT 10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v} = (1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$ và tiếp xúc với (S).

Giải

Ta có: (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R = 4$. VTPHƯƠNG TRÌNH của (α) là $\vec{n} = (1;4;1)$.

$\Rightarrow$ VTPHƯƠNG TRÌNH của (P) là: $\vec{n}_P = [\vec{n}, \vec{v}] = (2;-1;2)$ $\Rightarrow$ Phương trình của (P) có dạng: $2x - y + 2z + m = 0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P)) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -21 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Vậy: $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$ hoặc $(P): 2x - y + 2z - 21 = 0$.

HT 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, , cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với d và trục Ox, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Giải

Ta có: (S) có tâm $I(1;1;2)$, bán kính $R = 2$. d có VTCP $\vec{u} = (2;2;1)$.

$(P)//d, Ox \Rightarrow$ (P) có VTPHƯƠNG TRÌNH $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{i}] = (0;1;-2) \Rightarrow$ PHƯƠNG TRÌNH của (P) có dạng: $y - 2z + D = 0$.

(P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|1-4+D|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2 \Leftrightarrow |D-3| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 3+2\sqrt{5} \\ D = 3-2\sqrt{5} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (P): $y - 2z + 3 + 2\sqrt{5} = 0$ hoặc (P): $y - 2z + 3 - 2\sqrt{5} = 0$.

HT 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ vuông góc với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Chú ý: *Đối với dạng này, chúng ta không tìm được vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng dưới dạng trực tiếp. Chính vì vậy, ta phải dùng phương trình tổng quát của mặt phẳng để viết.*

Giải

Ta có: (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R = 3$, (P) có VTPHƯƠNG TRÌNH $\vec{n}_P = (1;0;1)$.

PHƯƠNG TRÌNH (Q) đi qua M có dạng: $A(x-3) + B(y-1) + C(z+1) = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

(Q) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(Q)) = R \Leftrightarrow |-4A + B + C| = 3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (*)

$(Q) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow A + C = 0 \Leftrightarrow C = -A$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow |B - 5A| = 3\sqrt{2A^2 + B^2} \Leftrightarrow 8B^2 - 7A^2 + 10AB = 0 \Leftrightarrow A = 2B \vee 7A = -4B$

- Với $A = 2B$. Chọn B = 1, A = 2, C = –2 $\Rightarrow (Q): 2x + y - 2z - 9 = 0$
- Với $7A = -4B$. Chọn B = –7, A = 4, C = –4 $\Rightarrow (Q): 4x - 7y - 4z - 9 = 0$

HT 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$.

Giải

Ta có:(S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R = 3$. (P) chứa $Ox \Rightarrow (P): By + Cz = 0\ (B^2 + C^2 > 0)$

Mặt khác, đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (P) đi qua tâm I.

Suy ra: $-2B - C = 0 \Leftrightarrow C = -2B \rightarrow$ Chọn $B = 1 \rightarrow C = -2$

Vậy, phương trình $(P): y - 2z = 0$

HT 14. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng

$d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=1$.

Giải

Ta có: (S) có tâm $I(-1;1;-1)$, bán kính $R=2$.

PHƯƠNG TRÌNH mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0\ \ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Chọn $M(2;0;-2), N(3;1;0)\in d$.

Ta có: $\begin{cases} M\in(P) \\ N\in(P) \\ d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=b, 2c=-(a+b), d=-3a-b & (1) \\ 17a=-7b, 2c=-(a+b), d=-3a-b & (2)\end{array}\right.$

+ Với (1) $\Rightarrow (P): x+y-z-4=0$ + Với (2) $\Rightarrow (P): 7x-17y+5z-4=0$

HT 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y-z+17=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $p=6\pi$.

Giải

Ta có: Do (β) // (α) nên (β) có phương trình $(\beta): 2x+2y-z+D=0 (D\neq 17)$

(S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$. Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính $r=3$.

Khoảng cách từ I tới (β) là $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Do đó $\dfrac{|2.1+2(-2)-3+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |-5+D|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-7 \\ D=17 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Vậy (β) có phương trình $2x+2y-z-7=0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách

HT 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;1;0), B(0;0;-2), I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \\ d(I,(P))=\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-b, 2c=a-b, d=a-b & (1) \\ 5a=7b, 2c=a-b, d=a-b & (2)\end{array}\right.$.

+ Với (1) $\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P): $x-y+z+2=0$

+ Với (2) ⇒ Phương trình mặt phẳng (P): $7x+5y+z+2=0$.

HT 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=1\end{cases}$ và điểm $A(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Giải

Ta có: (d) đi qua điểm $M(0;-1;1)$ và có VTCT $\vec{u}=(1;2;0)$. Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ là VTPT của (P).

Phương trình mặt phẳng (P): $a(x-0)+b(y+1)+c(z-1)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+b-c=0$ (1).

Do (P) chứa (d) nên: $\vec{u}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow a+2b=0 \Leftrightarrow a=-2b$ (2)

$$d\left(A,(P)\right)=3 \Leftrightarrow \frac{\left|-a+3b+2c\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{\left|5b+2c\right|}{\sqrt{5b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow \left|5b+2c\right|=3\sqrt{5b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow 4b^2-4bc+c^2=0 \Leftrightarrow \left(2b-c\right)^2=0 \Leftrightarrow c=2b \qquad (3)$$

Từ (2) và (3), chọn $b=-1 \Rightarrow a=2, c=-2 \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P): $2x-y-2z+1=0$.

HT 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

• Vì O ∈ (P) nên $(P): ax+by+cz=0$, với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Do A ∈ (P) ⇒ $a+2b+3c=0$ (1) và $d(B,(P))=d(C,(P)) \Leftrightarrow \left|-b+2c\right|=\left|a+b+c\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $b=0$ hoặc $c=0$.

• Với $b=0$ thì $a=-3c \Rightarrow (P): 3x-z=0$ • Với $c=0$ thì $a=-2b \Rightarrow (P): 2x-y=0$

HT 19. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Giải

Ta có: Phương trình mặt phẳng (P) qua O nên có dạng: $Ax+By+Cz=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$).

Vì (P) ⊥ (Q) nên: $1.A+1.B+1.C=0 \Leftrightarrow C=-A-B$ (1)

$$d(M,(P))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2=2(A^2+B^2+C^2) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $8AB+5B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}B=0 & (3)\\ 8A+5B=0 & (4)\end{array}\right.$

Từ (3): B = 0 ⇒ C = –A. Chọn A = 1, C = –1 ⇒ $(P): x-z=0$

Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 ⇒ C = 3 ⇒ $(P): 5x - 8y + 3z = 0$.

HT 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{4}$ và điểm M(0; –2; 0). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với đường thẳng Δ, đồng thời khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 4.

Giải

Ta có: Phương trình mp (P) đi qua M(0; –2; 0) có dạng: $ax + by + cz + 2b = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Δ đi qua điểm A(1; 3; 0) và có một VTCP $\vec{u} = (1;1;4)$

Ta có: $\begin{cases} \Delta \,//\, (P) \\ d(A;(P)) = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ \frac{|a + 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4c \\ a = -2c \end{cases}$.

Với $a = 4c$. Chọn $a = 4, c = 1 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow$ Phương trình (P): $4x - 8y + z - 16 = 0$.

Với $a = -2c$. Chọn $a = 2, c = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$ Phương trình (P): $2x + 2y - z + 4 = 0$.

HT 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB = 2IC$

Giải

Ta có: phương trình (α) có dạng: $\text{ax} + by + cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Do $A(1;1;-1) \in (\alpha)$ nên: $a + b - c + d = 0$ (1); $(\alpha) \perp (P)$ nên $a - 2b + 2c = 0$ (2)

$$IB = 2IC \Rightarrow d(B,(\alpha)) = 2d(C;(\alpha)) \Rightarrow \frac{|a + b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2\frac{|-a + 2b - 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a - 3b + 6c - d = 0 \\ -a + 5b - 2c + 3d = 0 \end{array}\right. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau :

TH1 : $\begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \\ 3a - 3b + 6c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{-1}{2}a;\ c = -a;\ d = \frac{-3}{2}a$.

Chọn $a = 2 \Rightarrow b = -1; c = -2; d = -3 \Rightarrow (\alpha): 2x - y - 2z - 3 = 0$

TH2 : $\begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \\ -a + 5b - 2c + 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}a; c = a; d = \frac{-3}{2}a$.

Chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3; c = 2; d = -3 \Rightarrow (\alpha): 2x + 3y + 2z - 3 = 0$

Vậy: $(\alpha): 2x - y - 2z - 3 = 0$ hoặc $(\alpha): 2x + 3y + 2z - 3 = 0$

HT 22. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$, có $\vec{u}_{d1} = (2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\vec{u}_{d2} = (2;-1;4)$.

Do (P) cách đều d_1, d_2 nên (P) song song với d_1, d_2 $\Rightarrow \vec{n}_P = \left[\vec{u}_{d1}, \vec{u}_{d2}\right] = (7;-2;-4)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $7x - 2y - 4z + d = 0$

Do (P) cách đều d_1, d_2 suy ra $d(A,(P)) = d(B,(P))$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|7.2 - 2.2 - 4.3 + d\right|}{\sqrt{69}} = \frac{\left|7.1 - 2.2 - 4.1 + d\right|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow \left|d - 2\right| = \left|d - 1\right| \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P): $14x - 4y - 8z + 3 = 0$

HT 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$, $d_2: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2, sao cho khoảng cách từ d_1 đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ d_2 đến (P).

Giải

Ta có : d_1 đi qua $A(1;2;1)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (1;-1;0)$

d_2 đi qua $B(2;1;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}_2 = (1;-2;2)$

Gọi $\vec{n}$ là vec-tơ pháp tuyến của (P), vì (P) song song với d_1 và d_2 nên $\vec{n} = \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = (-2;-2;-1)$

$\Rightarrow$ Phương trìnht (P): $2x + 2y + z + m = 0$.

$d(d_1,(P)) = d(A;(P)) = \dfrac{\left|7 + m\right|}{3}$; $d(d_2,(P)) = d(B,(P)) = \dfrac{\left|5 + m\right|}{3}$

$$d(d_1,(P)) = 2d(d_2,(P)) \Leftrightarrow \left|7 + m\right| = 2.\left|5 + m\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7 + m = 2(5 + m) \\ 7 + m = -2(5 + m) \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -3;\ m = -\frac{17}{3}$$

+ Với $m = -3 \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - 3 = 0$ + Với $m = -\dfrac{17}{3} \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - \dfrac{17}{3} = 0$

HT 24. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Giải

Ta có: (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ d(I,(P)) = R \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = -b, c = -a - b, d = 2a + 3b & (1) \\ 3a = -8b, c = -a - b, d = 2a + 3b & (2) \end{array}\right.$

+ Với (1) $\Rightarrow$ Phương trình của (P): $x - y - 1 = 0$

+ Với (2) $\Rightarrow$ Phương trình của (P): $8x - 3y - 5z + 7 = 0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc

HT 25. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với mặt phẳng (P) : $2x - 2y - z + 1 = 0$ một góc 60^0. Tìm tọa độ giao điểm M của mặt phẳng (α) với trục Oz.

Giải

(Δ) qua điểm $A(1;0;0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1;-1;-2)$. (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}' = (2;-2;-1)$.

Giao điểm $M(0;0;m)$ cho $\overrightarrow{AM} = (-1;0;m)$. (α) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right] = (m; m-2; 1)$

(α) và (P): $2x - 2y - z + 1 = 0$ tạo thành góc 60^0 nên :

$$\left|\cos\left(\vec{n}, \vec{n}'\right)\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 4m + 5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{2} \text{ hay } m = 2 + \sqrt{2}$$

Vậy, $M(0;0;2-\sqrt{2})$ hay $M(0;0;2+\sqrt{2})$

HT 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến d của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$, $(\beta): 2x - z = 0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): x - 2y + 2z - 1 = 0$ một góc φ mà $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{9}$

Giải

Lấy $A(0;1;0)$, $B(1;3;2) \in d$. (P) qua A $\Rightarrow$ phương trình (P) có dạng: $Ax + By + Cz - B = 0$.

(P) qua B nên: $A + 3B + 2C - B = 0 \Rightarrow A = -(2B + 2C)$

$\Rightarrow (P): -(2B + 2C)x + By + Cz - B = 0$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-2B - 2C - 2B + 2C\right|}{3\sqrt{(2B+2C)^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow 13B^2 + 8BC - 5C^2 = 0.$$

Chọn $C = 1 \Rightarrow B = 1;\ B = \frac{5}{13}$.

+ Với $B = C = 1 \Rightarrow (P): -4x + y + z - 1 = 0$

+ Với $B = \frac{5}{13},\ C = 1 \Rightarrow (P): -23x + 5y + 13z - 5 = 0$.

HT 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;-3), B(2;-1;-6)$ và mặt phẳng

$(P): x+2y+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và tạo với mặt phẳng (P) một góc α thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Giải

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} A \in (Q) \\ B \in (Q) \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b-3c+d=0 \\ 2a-b-6c+d=0 \\ \dfrac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4b, c=-3b, d=-15b \\ a=-b, c=0, d=-b \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình mp(Q): $4x-y+3z+15=0$ hoặc (Q): $x-y-3=0$.

HT 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x-2y+5z-1=0$ và $(Q): x-4y-8z+12=0$. Lập phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc $\alpha = 45^0$.

Giải

Giả sử phương trình mặt phẳng $(R): ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.

Ta có: $(R) \perp (P) \Leftrightarrow 5a-2b+5c=0$ (1);

$\cos(\widehat{(R),(Q)}) = \cos 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a-4b-8c|}{9\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 7a^2+6ac-c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-c \\ c=7a \end{array}\right.$

- Với $a=-c$: chọn $a=1, b=0, c=-1$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(R): x-z=0$
- Với $c=7a$: chọn $a=1, b=20, c=7$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(R): x+20y+7z=0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến tam giác

HT 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm A(4; 5; 6). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, cắt các trục tọa độ lần lượt tại I, J, K mà A là trực tâm của tam giác IJK.

Giải

Gọi I(a;0;0), J(0;b;0), K(0;0;c) $\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$\overrightarrow{IA}=(4-a;5;6)$, $\overrightarrow{JA}=(4;5-b;6)$, $\overrightarrow{JK}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{IK}=(-a;0;c)$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}+\dfrac{6}{c}=1 \\ -5b+6c=0 \\ -4a+6c=0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{77}{4};\ b=\dfrac{77}{5};\ c=\dfrac{77}{6}$

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $4x+5y+6z-77=0$.

HT 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho A(2; 0; 0) M(1; 1; 1). Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B(0; b; 0), C(0; 0; c) (b > 0, c > 0). Chứng minh rằng: $b+c=\frac{bc}{2}$. Từ đó, tìm b, c để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Giải

Ta có: phương trình mp (P) có dạng: $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Vì $M\in(P)$ nên $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow b+c=\frac{bc}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;b;0)$, $\overrightarrow{AC}(-2;0;c)$. Khi đó $S=\sqrt{b^2+c^2+(b+c)^2}$.

Vì $b^2+c^2\geq 2bc;\ (b+c)^2\geq 4bc$ nên $S\geq\sqrt{6bc}$.

Mà $bc=2(b+c)\geq 4\sqrt{bc}\Rightarrow bc\geq 16$. Do đó $S\geq\sqrt{96}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=c=4$.

Vậy: $\min S=\sqrt{96}$ khi $b=c=4$.

HT 31. Trong không gian toạ độ $Oxyz,$ cho điểm $A(2;2;4)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và (Q) cắt hai tia $Ox,\ Oy$ tại 2 điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Giải

Vì (Q) // (P) nên (Q): $x+y+z+d=0\ (d\neq 4)$. Giả sử $B=(Q)\cap$ Ox, $C=(Q)\cap Oy$

$\Rightarrow B(-d;0;0), C(0;-d;0)\ (d<0)$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=6\Leftrightarrow d=-2$

$\Rightarrow (Q): x+y+z-2=0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 6: Các dạng khác về viết phương trình mặt phẳng (Nâng cao)

HT 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

Giải

Ta có $d(O,(P))\leq OA$.

Do đó $d(O,(P))_{\max}=OA$ xảy ra $\Leftrightarrow OA\perp(P)$ nên mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với OA.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;-1;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $2x-y+z-6=0$..

HT 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

Giải

Gọi H là hình chiếu của A trên d $\Rightarrow$ d(d, (P)) = d(H, (P)).

Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P),

Ta có $AH \geq HI \Rightarrow$ HI lớn nhất khi $A \equiv I$.

Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm vec-tơ pháp tuyến $\Rightarrow$ (P): $7x + y - 5z - 77 = 0$

HT 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A(4;0;–1) song song với d và I(–2;0;2) là hình chiếu vuông góc của A trên d. Viết phương trình của mặt phẳng chứa Δ và có khoảng cách đến d là lớn nhất.

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ, thì $(P) \parallel (d)$ hoặc $(P) \supset (d)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta luôn có $IH \leq IA$ và $IH \perp AH$.

Mặt khác $\begin{cases} d(d,(P)) = d(I,(P)) = IH \\ H \in (P) \end{cases}$

Trong (P), $IH \leq IA$; do đó $m$axIH = IA $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ A . Lúc này (P) ở vị trí (P_0) $\perp$ IA tại A.

Vectơ pháp tuyến của (P_0) là $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = \left(6;0;-3\right)$, cùng phương với $\vec{v} = \left(2;0;-1\right)$.

Phương trình của mặt phẳng (P_0) là: $2(x-4) - 1.(z+1) = 2x - z - 9 = 0$.

HT 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

Giải

Phương trình mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0 \ (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

(P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b;c)$, d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u} = (2;1;2)$.

Vì (P) ⊃ d nên $\begin{cases} M \in (P) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c + d = 0 \\ 2a + b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -(2a+b) \\ d = a + b \end{cases}$.

Xét 2 trường hợp:

<u>TH1</u>: Nếu b = 0 thì (P): $x - z + 1 = 0$. Khi đó: $d(A,(P)) = 0$.

<u>TH2</u>: Nếu b ≠ 0. Chọn $b = 1$ ta được (P): $2ax + 2y - (2a+1)z + 2a + 2 = 0$.

Khi đó: $d(A,(P)) = \dfrac{9}{\sqrt{8a^2 + 4a + 5}} = \dfrac{9}{\sqrt{2\left(2a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}} \leq 3\sqrt{2}$

Vậy $\max d(A,(P)) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2a + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$. Khi đó: (P): $x - 4y + z - 3 = 0$.

HT 36. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $Ax+B(y+1)+C(z-2)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+B-2C=0$

$(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$

$N(-1;1;3)\in(P) \Leftrightarrow -A+B+3C+B-2C=0 \Leftrightarrow A=2B+C \quad \Rightarrow (P):(2B+C)x+By+Cz+B-2C=0$

$$d(K,(P))=\frac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}$$

- Nếu B = 0 thì d(K, (P)) = 0 (loại)
- Nếu $B\neq 0$ thì $d(K,(P))=\dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{C}{B}+1\right)^2+2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu “=” xảy ra khi B = –C. Chọn C = 1. Khi đó phương trình $(P): x+y-z+3=0$.

HT 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $(P): ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. Gọi $\alpha=\widehat{((P),(Q))}$.

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3), N(1;0;4)\in d$. Ta có: $\begin{cases}M\in(P)\\N\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-a-b\\d=7a+4b\end{cases}$

$\Rightarrow$ (P): $ax+by+(-2a-b)z+7a+4b=0 \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}$

<u>TH1</u>: Nếu a = 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=30^0$.

<u>TH2</u>: Nếu a ≠ 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{\left|1+\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{5+4\dfrac{b}{a}+2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$. Đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và $f(x)=\cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9}{6}.\dfrac{x^2+2x+1}{5+4x+2x^2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x)=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=90^0>30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức a = 0. Khi đó chọn $b=1, c=1, d=4$.

Vậy: (P): $y-z+4=0$.

HT 38. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz \quad (a,b,c > 0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $M(9;1;1) \in (P) \Rightarrow \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1); $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$ (2)

(1) $\Leftrightarrow abc = 9bc + ac + ab \geq 3\sqrt[3]{9(abc)^2} \Leftrightarrow (abc)^3 \geq 27.9(abc)^2 \Leftrightarrow abc \geq 243$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9bc = ac = ab \\ \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$ (P): $\frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$.

HT 39. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz \quad (a,b,c > 0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $M(1;2;3) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Ta có: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Theo bất đẳng thức Bunhia-copxki ta có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = \frac{14}{2} \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$

Vậy, phương trình mặt phẳng: $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$

HT 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;5;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA + OB + OC$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz\ \ (a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;2;3)\in(P)\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}=1$

$$\Rightarrow\left(\frac{2}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=10+2\sqrt{10}+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow a+b+c\geq\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}=1\\ \frac{\sqrt{2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{b}=\frac{\sqrt{3}}{c}\\ a+b+c=10+2\sqrt{10}+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+\sqrt{6}+\sqrt{10}\\ b=5+\sqrt{10}+\sqrt{15}\\ c=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\end{cases}$

Vậy, $(P):\frac{x}{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\frac{y}{5+\sqrt{10}+\sqrt{15}}+\frac{z}{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}=1$

PHẦN II VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng bằng cách xác định vectơ chỉ phương

- Vec-tơ chỉ phương của đường thẳng là vec-tơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng đó.
- Một đường thẳng có vô số các vec-tơ chỉ phương.
- Để tìm vec-tơ chỉ phương của đường thẳng chúng ta có 1 số cách sau:

+ Trực tiếp: Dựa vào mối liên hệ giữa các yếu tố: ĐT-ĐT, MP-MẶT PHẲNG

+ Gián tiếp: Tìm 1 cặp vec-tơ không cùng phương cùng vuông góc với vec-tơ chỉ phương của đường thẳng.

BÀI TẬP

HT 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(-2;3;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ qua A và $\Delta // d$.

Giải

Ta có: $\Delta // d$ nên Δ có 1 vec-tơ chỉ phương là: $\vec{u} = (2;-1;2)$

Vậy, phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$

HT 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P).

Giải

Ta có, $d \perp (P)$ nên d có một vec-tơ chỉ phương: $\vec{u} = (1;1;1)$

Vậy, phương trình chính tắc của đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$

HT 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và vuông góc với cả d_1, d_2.

Giải

Gọi $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là các vec-tơ chỉ phương của Δ, d_1, d_2

Với $\vec{u}_1 = (1;-2;1), \vec{u}_2 = (2;1;-1)$

Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta$ có 1 vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1;3;-3)$

Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-3}$

HT 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$; $(Q): x+2y-z=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A và cùng song song với (P) và (Q).

Giải

Gọi $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của d

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ lần lượt là vec-tơ pháp tuyến của (P) và (Q) với $\vec{n}_1 = (1;1;1), \vec{n}_2 = (1;2;-1)$

Ta có: $\begin{cases} d//(P) \\ d//(Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{n}_2 \end{cases}$ Suy ra, d có 1 vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2]$=(-3;2;1)

Vậy, phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$

HT 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

Giải

Gọi $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

$\vec{u}_d = (2;1;3)$ là 1 vec-tơ chỉ phương của d.

$\vec{n}_P = (1;-1;-1)$ là 1 vec-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp d \\ \Delta//(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u} \perp \vec{n}_P \end{cases} \Rightarrow \Delta$ có 1 vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}\right] = (2;5;-3)$.

Δ nhận $\vec{u}$ làm VTCP $\Rightarrow \Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+2}{-3}$

HT 46. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $(t \in R)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 3 = 0$.Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trên (P), cắt và vuông góc với (d).

Giải

Gọi A = d ∩ (P) $\Rightarrow A(1;-3;1)$.

Ta có: $\vec{n}_P = (2;-1;-2)$ là một vec-tơ pháp tuyến của (P).

$\vec{u}_d = (-1;2;1)$ là một vec-tơ chỉ phương của d

Ta có : $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases}$ Suy ra, Δ có 1 vec-tơ chỉ phương : $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (3;0;3)$

Vậy, phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \\ z = 1 + t \end{cases}$

HT 47. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Lập phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ.

Giải

Ta có: $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$. Gọi H = d ∩ Δ. Giả sử $H(1+2t; -1+t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (2t-1; t-2; -t)$.

Theo đề bài, $d \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_\Delta \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t-2) - (-t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \vec{u}_d = 3\overrightarrow{MH} = (1;-4;-2)$

$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$.

HT 48. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$ và hai điểm A(1;7; –1), B(4;2;0). Lập phương trình đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên (P).

Giải

Gọi C là hình chiếu của A trên (P).
Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (P)
Suy ra, $C = \Delta \cap (P)$.

Ta có : $\Delta \perp (P) \Rightarrow$ Δ có một vec-tơ chỉ phương : $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (1;2;-2)$

Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 7+2t \\ z = -1-2t \end{cases}$

Ta có, $C \in \Delta$ nên suy ra $C(1+c, 7+2c, -1-2c)$

Mặt khác, $C \in (P) \Rightarrow 1+c+14+4c+2+4c+1 = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Vậy, $C(-1;3;3)$

Gọi D là hình chiếu của B trên (P). Tương tự trên ta có : $D(3;0;2)$

Khi đó, ta có : $d \equiv CD$. Với $\overrightarrow{CD}(4;-3;-1)$

Vậy, phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{-1}$

HT 49. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \end{cases}$ trên mặt phẳng $P: x-2y+z+5=0$.

Giải

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 4t \\ y = -\dfrac{3}{2}+7t \\ z = 2t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2;1)$.

Gọi $A = d \cap (P) \Rightarrow A\left(4;\dfrac{11}{2};2\right)$. Ta có $B\left(0;-\dfrac{3}{2};0\right) \in d, B\left(0;-\dfrac{3}{2};0\right) \notin (P)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của B trên (P). Ta tìm được $H\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{6};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P) ⇒ Δ đi qua A và H

⇒ Δ có VTCP $\vec{u} = 3\overrightarrow{HA} = (16;13;10)$ ⇒ Phương trình của Δ: $\begin{cases} x = 4+16t \\ y = \dfrac{11}{2}+13t \\ z = 2+10t \end{cases}$.

HT 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi A, B, C lần lượt giao điểm của mặt phẳng (P): $6x+2y+3z-6=0$ với Ox, Oy, Oz. Lập phương trình đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P).

Giải

Ta có: $(P) \cap Ox = A(1;0;0)$; $(P) \cap Oy = B(0;3;0)$; $(P) \cap Oz = C(0;0;2)$

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc (OAB) tại trung điểm M của AB;
(α) là mặt phẳng trung trực cạnh OC;

I tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC. Ta có: $I = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

Gọi J tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì IJ $\perp$ (ABC), nên d chính là đường thẳng IJ.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

HT 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-1), B(2;1;1); C(0;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng d.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2), \overrightarrow{AC} = (-1;-1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-5;-2)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(ABC): x + 5y + 2z - 9 = 0$

Gọi trực tâm của tam giác ABC là $H(a;b;c)$, khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ a + b - 3c = 0 \\ a + 5b + 2c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1;1)$$

Do đường thẳng Δ nằm trong (ABC) và vuông góc với (d) nên:

$$\begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{ABC} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{ABC}, \vec{u}_d\right] = (12;2;-11).$$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-11}$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến một đường thẳng khác

HT 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt và vuông góc với đường thẳng d và tìm toạ độ điểm M′ đối xứng với M qua d.

Giải

PTTS của $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$. d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$.

Gọi H là hình chiếu của M trên d $\Rightarrow H(1 + 2t; -1 + t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (2t - 1; -2 + t; -t)$

Ta có MH $\perp$ d $\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua d ⇒ H là trung điểm của MM′ ⇒ $M'\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

HT 53. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+3y+2z+2=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P), đi qua M(2; 2; 4) và cắt đường thẳng d.

Giải

Đường thẳng (d) có PTTS: $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2-2t\\z=2+2t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;\ 3;\ 2)$

Giả sử N(−1 + 3t ; 2 − 2t ; 2 + 2t) ∈ d ⇒ $\overrightarrow{MN}=(3t-3;-2t;2t-2)$

Để MN // (P) thì $\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0\Leftrightarrow t=7$ ⇒ N(20; −12; 16)

Phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{9}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-4}{6}$

HT 54. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng (P), (Q) và đường thẳng (d) lần lượt có phương trình: $(P):x-2y+z=0$, $(Q):x-3y+3z+1=0$, $(d):\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt đường thẳng (d).

Giải

(P), (Q) lần lượt có VTPT là $\vec{n}_P=(1;-2;1),\vec{n}_Q=(1;-3;3)\Rightarrow\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-3;-2;-1)$

PTTS của (d): $x=1+2t,y=t,z=1+t$. Gọi A = (d) ∩ (Δ) ⇒ $A(1+2t;t;1+t)$.

Do A ⊂ (P) nên: $1+2t-2t+1+t=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow A(-3;-2;-1)$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_P\\\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_Q\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-3;-2;-1)$

Vậy phương trình đường thẳng $(\Delta):\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

HT 55. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-1),B(2;1;1),C(0;1;2)$ và đường thẳng $(d):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng (d).

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(-1;-1;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-5;-2)$

⇒ phương trình (ABC): $x+5y+2z-9=0$

Gọi trực tâm của ΔABC là $H(a;b;c)$ $\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+2c=3\\a+b-3c=0\\a+5b+2c=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases}\Rightarrow H(2;1;1)$

Do (Δ) ⊂ (ABC) và vuông góc với (d) nên: $\begin{cases}\vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_{ABC} \\ \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_{d}\end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \left[\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_{d}\right] = (12;2;-11)$

⇒ PT đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{12} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-11}$.

HT 56. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y-z+5=0$, đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(-2;3;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đi qua giao điểm của d và (P), đồng thời vuông góc với d. Tìm điểm M trên Δ sao cho khoảng cách AM ngắn nhất.

Giải

Gọi B = d ∩ (P) ⇒ $B(-1;0;4)$. Vì $\begin{cases}\Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d\end{cases}$ nên $\begin{cases}\vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_{P} \\ \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_{d}\end{cases}$.

Do đó ta có thể chọn $\vec{u}_{\Delta} = \dfrac{1}{3}\left[\vec{n}_{P}, \vec{u}_{d}\right] = (1;-1;-1)$ ⇒ PT của Δ: $\begin{cases}x = -1+t \\ y = -t \\ z = 4-t\end{cases}$.

Giả sử $M(-1+t;-t;4-t) \in \Delta \Rightarrow AM = \sqrt{3t^2+8t+10} = \sqrt{3\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{14}{3}} \geq \sqrt{\dfrac{14}{3}}$

Dấu "=" xảy ra ⇔ $t = -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{16}{3}\right)$. Vậy AM đạt GTNN khi $M\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{16}{3}\right)$.

HT 57. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$, đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Giải

Gọi $\vec{u}_d, \vec{u}_{\Delta}$ lần lượt là các VTCP của d và Δ; $\vec{n}_P$ là VTPT của (P).

Đặt $\vec{u}_d = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$. Vì d nằm trong (P) nên ta có : $\vec{n}_P \perp \vec{u}_d$

$\Rightarrow a-b+c=0 \Leftrightarrow b=a+c$ (1).

Theo gt: $(d,\Delta) = 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có : $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow c=0;\ c=-\dfrac{15a}{7}$

+ Với $c=0$: chọn $a=b=1$ ⇒ PTTS của d là : $\begin{cases}x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1\end{cases}$

+ Với $c=-\dfrac{15a}{7}$: chọn $a=7,\ c=-15,\ b=-8$ ⇒PTTS của d là: $\begin{cases}x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t\end{cases}$

HT 58. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$.

Giải

PTTS d: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow M(1;-3;0)$. (P) có VTPT $\vec{n}_P=(1;1;1)$, d có VTCP $\vec{u}_d=(2;1;-1)$

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên VTCP $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó $\overrightarrow{MN}=(a-1;b+3;c)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\perp\vec{u}_\Delta \\ N\in(P) \\ MN=\sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+2=0 \\ 2a-3b+c-11=0 \\ (a-1)^2+(b+3)^2+c^2=42 \end{cases}$ $\Rightarrow$ N(5; –2; –5) hoặc N(–3; – 4; 5)

- Với N(5; –2; –5) $\Rightarrow$ Phương trình của Δ : $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+5}{1}$
- Với N(–3; – 4; 5) $\Rightarrow$ Phương trình của Δ : $\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}$.

HT 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-1=0$, hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, $\Delta': \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) và cắt Δ′; d và (Δ) chéo nhau mà khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Giải

(α) có VTPT $\vec{n}=(1;1;-1)$, Δ có VTCP $\vec{u}_\Delta=(-1;-1;1)$ ⇒ Δ ⊥ (α).

Gọi $A=\Delta'\cap(\alpha) \Rightarrow A(0;0;-1)$; $B=\Delta\cap(\alpha) \Rightarrow B(1;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;0;1)$

Vì $d\subset(\alpha)$ và d cắt Δ′ nên d đi qua A và Δ ⊥ (α) nên mọi đường thẳng nằm trong (α) và không đi qua B đều chéo với Δ.

Gọi $\vec{u}_d=(a;b;c)$ là VTCP của (d) ⇒ $\vec{u}_d.\vec{n}=a+b-c=0$ (1)

và $\vec{u}_d$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ (2)

Ta có: $d(d,\Delta)=d(B,d) \Rightarrow \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2b^2+(a-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (3)

Từ (1) và (3) ⇒ $ac=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ c=0 \end{array}\right.$.

- Với $a=0$. Chọn $b=c=1 \Rightarrow \vec{u}_d=(0;1;1) \Rightarrow d: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$
- Với $c=0$. Chọn $a=-b=1 \Rightarrow \vec{u}_d=(1;-1;0) \Rightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến hai đường thẳng khác

HT 60. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = 3+7t \\ y = 1-2t \\ z = 1-3t \end{cases}.$$

Giải

Phương trình tham số của $\Delta_1: \begin{cases} x = 7+t' \\ y = 3+2t' \\ z = 9-t' \end{cases}$

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường vuông góc chung với Δ_1 và Δ_2

$\Rightarrow M(7+a; 3+2a : 9-a), N(3+7b; 1-2b; 1-3b)$

VTCP lần lượt của Δ_1 và Δ_2 là $\vec{u}$ = (1; 2; –1) và $\vec{b}$ = (–7;2;3) $\overrightarrow{MN} = (3b-a-4; -2b-2a-2; -3b+a-8)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(7;3;9) \\ N(3;1;1) \end{cases}$

Đường vuông góc chung Δ chính là đường thẳng MN.

Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$

HT 61. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M\left(-4;-5;3\right)$ và cắt cả hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 5-3t_1 \\ y = -7+2t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

Giải

Ta có phương trình các đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 5-3t_1 \\ y = -7+2t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2+2t_2 \\ y = -1+3t_2 \\ z = 1-5t_2 \end{cases}$.

Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2 \Rightarrow A(5-3t_1; -7+2t_1; t_1)$, $B(2+2t_2; -1+3t_2; 1-5t_2)$.

$\overrightarrow{MA} = (-3t_1+9; 2t_1-2; t_1-3)$, $\overrightarrow{MB} = (2t_2+6; 3t_2+4; -5t_2-2)$

$\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] = (-13t_1t_2 - 8t_1 + 13t_2 + 16; -13t_1t_2 + 39t_2; -13t_1t_2 - 24t_1 + 31t_2 + 48)$

M, A, B thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương ⇔ $\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-1;-3;2), B(2;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3;2;-1)$

Đường thẳng d qua M(–4; –5; 3) và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (3;2;-1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -4+3t \\ y = -5+2t \\ z = 3-t \end{cases}$

HT 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và mặt phẳng (α) có phương trình là $\Delta_1: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 5+3t \\ z = t \end{cases}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$, $(\alpha): x - y + z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của Δ_1 với (α) đồng thời cắt Δ_2 và vuông góc với trục Oy.

Giải

Toạ độ giao điểm A của (α) và Δ_1 thoả mãn hệ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 5+3t \\ z = t \\ x-y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow A(1;2;-1)$

Trục Oy có VTCP là $\vec{j} = (0;1;0)$.

Gọi d là đường thẳng qua A cắt Δ_2 tại $B(1+t;-1+t;-2+2t)$.

$\overrightarrow{AB} = (t;t-3;2t-1); d \perp Oy \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3;0;5)$

Đường thẳng d đi qua A nhận $\overrightarrow{AB} = (3;0;5)$ làm VTCP có phương trình là $\begin{cases} x = 1+3u \\ y = 2 \\ z = -1+5u \end{cases}$.

HT 63. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng và hai đường thẳng có phương trình $(P): 3x + 12y - 3z - 5 = 0$ và $(Q): 3x - 4y + 9z + 7 = 0$, $d_1: \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$, $d_2: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng (P), (Q) và cắt d_1, d_2

Giải

(P) có VTPT $\vec{n}_P = (1;\ 4;\ -1)$, (Q) có pháp vectơ $\vec{n}_Q = (3;\ -4;\ 9)$

d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2;\ -4;\ 3)$, d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-2;\ 3;\ 4)$

Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(-5+2a;3-4a;-1+3a)$; $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(3-2b;-1+3b;2+4b)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2b-2a+8;3b+4a-4;4b-3a+3)$

Gọi $\vec{u} = \dfrac{1}{4}[\vec{n}_P;\ \vec{n}_Q] = (8;\ -3;\ -4)$

Theo đề bài: $\begin{cases} \Delta//(P) \\ \Delta//(Q) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k.\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-2a+8 = 8k \\ 3b+4a-4 = -3k \\ 4b-3a+3 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-3;-1;2) \\ B(5;-4;-2) \end{cases}$

Đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB.

Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{8} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{-4}$

HT 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$ và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2 tại A và B sao cho AB = 3.

Giải

$A \in (d_1) \Rightarrow A(4 + 2t; 1 + 2t; -t)$; $B \in (d_2) \Rightarrow B(-3 + 2t'; -5 + 3t'; 7 - 2t')$

$\overrightarrow{AB} = (-7 + 2t' - 2t; -6 + 3t' - 2t; 7 - 2t' + t)$, $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}_P = 0 \\ AB = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2; -1; 1), \overrightarrow{AB} = (-1; 2; 2)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ): $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

HT 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với (P), vuông góc với d_1 và cắt d_2 tại điểm E có hoành độ bằng 3.

Giải

d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$, d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (2; 3; 2)$, (P) có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Giả sử Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$, $E \in d_2$ có $x_E = 3 \Rightarrow E(3; -1; 6)$.

Ta có: $\begin{cases} \Delta \,//\, (P) \\ \Delta \perp d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ \vec{u}.\vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow$ Chọn $\vec{u} = (1; 1; -1)$

$\Rightarrow$ PT đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = -1 + t; \\ z = 6 - t \end{cases}$.

HT 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (P) có phương trình: $(d_1) : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$, $(d_2) : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Giải

Đặt $A(-1 + a; -2 + 2a; a)$, $B(2 + 2b; 1 + b; 1 + b) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a + 2b + 3; -2a + b + 3; -a + b + 1)$

Do AB // (P) nên: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_P = (1; 1; -2) \Leftrightarrow b = a - 4$. Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (a - 5; -a - 1; -3)$

$AB = \sqrt{(a-5)^2 + (-a-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 35} = \sqrt{2(a-2)^2 + 27} \geq 3\sqrt{3}$

Suy ra: $\min AB = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$, $A(1; 2; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; -3)$.

Vậy $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$.

HT 67. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x+8}{2} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 2-t \\ z = -4+2t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B. Tính AB.

Giải

Giả sử: $A(-8+2t_1;6+t_1;10-t_1) \in d_1$, $B(t_2;2-t_2;-4+2t_2) \in d_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t_2 - 2t_1 + 8; -t_2 - t_1 - 4); 2t_2 + t_1 - 14)$.

$\overrightarrow{AB}, \vec{i} = (1;0;0)$ cùng phương $\Leftrightarrow \begin{cases} -t_2 - t_1 - 4 = 0 \\ 2t_2 + t_1 - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -22 \\ t_2 = 18 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-52;-16;32),\ B(18;-16;32)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = -52+t; \\ y = -16; \\ z = 32 \end{cases}$.

HT 68. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ và 2 đường thẳng $(d): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$, $(d'): \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng (d').

Giải

Ta có $\vec{n}_P = (2;-1;2)$, $\vec{u}_d = (1;3;2)$ và PTTS của (d'): $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$

Gọi A = (d') $\cap$ (P) $\Rightarrow A(1-2t;2+t;t)$.

Do A $\in$ (P) nên: $2(1-2t) - 2 - t + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(1;2;0)$

Mặt khác (Δ) nằm trong (P), vuông góc với (d) nên $\vec{u}_\Delta$ vuông góc với $\vec{n}_P$, $\vec{u}_d$

$\Rightarrow$ ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (-8;-2;7)$ $\Rightarrow$ Phương trình $\Delta: \dfrac{x-1}{-8} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{7}$

HT 69. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $x + y + z - 1 = 0$ đồng thời cắt cả hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$, với $t \in R$.

Giải

Lấy $M \in d_1 \Rightarrow M(1+2t_1;-1-t_1;t_1)$; $N \in d_2 \Rightarrow N(-1+t;-1;-t)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (t - 2t_1 - 2; t_1; -t - t_1)$

$(d) \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k.\vec{n}; k \in R^* \Leftrightarrow t - 2t_1 - 2 = t_1 = -t - t_1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4}{5} \\ t_1 = \dfrac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow d: x - \dfrac{1}{5} = y + \dfrac{3}{5} = z + \dfrac{2}{5}$

HT 70. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$, $d_3: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $AB = BC$.

Giải

Xét ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba đường thẳng d_1, d_2, d_3.

Giả sử $A(t;4-t;-1+2t)$, $B(u;2-3u;-3u)$, $C(-1+5v;1+2v;-1+v)$.

Ta có: A, B, C thẳng hàng và AB = BC ⇔ B là trung điểm của AC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + (-1+5v) = 2u \\ 4 - t + (1+2v) = 2.(2-3u) \\ -1 + 2t + (-1+v) = 2(-3u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3;1),\ B(0;2;0),\ C(-1;1;-1).$$

Đường thẳng Δ đi qua A, B, C có phương trình: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến khoảng cách

HT 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): -x + y + 2z + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), song song với d và cách d một khoảng là $\sqrt{14}$.

Giải

Chọn A(2;3;– 3), B(6;5;– 2) ∈ (d), mà A, B ∈ (P) nên d ⊂ (P).

Gọi $\vec{u}$ là VTCP của $d_1 \subset$ (P), qua A và vuông góc với d thì $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u} \perp \vec{u}_P \end{cases}$

nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_d, \vec{u}_P] = (3;-9;6)$.

Phương trình của đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 9t \\ z = -3 + 6t \end{cases} \quad (t \in R)$

Lấy M(2+3t; 3 – 9t; – 3+6t) ∈ (d_1). Δ là đường thẳng qua M và song song với (d).

Theo đề : $AM = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{9t^2 + 81t^2 + 36t^2} = \sqrt{14} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{3}$

- t = $-\frac{1}{3} \Rightarrow$ M(1;6;– 5) $\Rightarrow (\Delta_1): \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{1}$
- t = $\frac{1}{3} \Rightarrow$ M(3;0;– 1) $\Rightarrow (\Delta_2): \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

HT 72. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi I là giao điểm của d và (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với d sao cho khoảng cách từ I đến Δ bằng $h=3\sqrt{2}$.

Giải

(P) có VTPT $\vec{n}_P=(1;1;-1)$ và d có VTCP $\vec{u}=(1;-1;-3)$. $I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;2;4)$

Vì $\Delta\subset(P);\Delta\perp d\Rightarrow\Delta$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{u}\right]=(-4;2;-2)$

Gọi H là hình chiếu của I trên $\Delta\Rightarrow H\in mp(Q)$ qua I và vuông góc Δ

$\Rightarrow$ Phương trình $(Q): -2(x-1)+(y-2)-(z-4)=0\Leftrightarrow -2x+y-z+4=0$

Gọi $d_1=(P)\cap(Q)\Rightarrow d_1$ có VTCP $\left[\vec{n}_P;\vec{n}_Q\right]=(0;3;3)=3(0;1;1)$ và d_1 qua I $\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=1\\ y=2+t\\ z=4+t\end{cases}$

Giả sử $H\in d_1\Rightarrow H(1;2+t;4+t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(0;t;t)$. Ta có: $IH=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2t^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-3\end{array}\right.$

- Với $t=3\Rightarrow H(1;5;7)\Rightarrow$ Phương trình $\Delta: \frac{x-1}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-1}$
- Với $t=-3\Rightarrow H(1;-1;1)\Rightarrow$ Phương trình $\Delta: \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

HT 73. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (P) và cắt d tại một điểm M cách (P) một khoảng bằng 2.

Giải

Vì Δ ⊥ (P) nên Δ nhận $\vec{n}_P=(2;1;-2)$ làm VTCP.

Giả sử $M(t-1;7t+1;3-t)\in d$. Ta có: $d(M,(P))=2\Leftrightarrow|11t+2|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{8}{11}\\ t=\frac{4}{11}\end{array}\right.$

+ Với $t=-\frac{8}{11}\Rightarrow M\left(-\frac{19}{11};-\frac{45}{11};\frac{41}{11}\right)\Rightarrow$Δ: $\left\{x=-\frac{19}{11}+2t;\ y=-\frac{45}{11}+t;\ z=\frac{41}{11}-2t\right.$

+ Với $t=\frac{4}{11}\Rightarrow M\left(-\frac{7}{11};\frac{39}{11};\frac{29}{11}\right)\Rightarrow$Δ: $\left\{x=-\frac{7}{11}+2t;\ y=\frac{39}{11}+t;\ z=\frac{29}{11}-2t\right.$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 5: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến góc

HT 74. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm A(3; –1; 1), đường thẳng Δ: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): $x-y+z-5=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Giải

Gọi $\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta, \vec{n}_P$ lần lượt là các VTCP của d, Δ và VTPT của (P).

Giả sử $\vec{u}_d = (a;b;c)\ \ (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

+ Vì d ⊂ (P) nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_P \Rightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c$ (1)

+ $\left(\widehat{d,\Delta}\right) = 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a + 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a + 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ 15a + 7c = 0 \end{array}\right.$

+ Với c = 0: chọn a = b = 1 ⇒ PTTS của d: $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = -1 - t; \\ z = 1 \end{cases}$

+ Với 15a + 7c = 0: chọn a = 7, c = –15, b = –8

⇒ PTTS của d: $\begin{cases} x = 3 + 7t; \\ y = -1 - 8t; \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

HT 75. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$, cắt các đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ và tạo với d_1 một góc 30^0.

Giải

Ta có $d_1 \subset (P)$. Gọi $A = d_2 \cap (P) \Rightarrow A(5;-1;5)$. d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (1;1;2)$.

Lấy $B(1 + t;t;2 + 2t) \in d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t - 4;t + 1;2t - 3)$ là VTCP của Δ

Ta có $\cos(\Delta, d_1) = \cos 30^0 \Leftrightarrow \dfrac{|6t - 9|}{\sqrt{6}\sqrt{(t - 4)^2 + (t + 1)^2 + (2t - 3)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 4 \end{array}\right.$

+ Với $t = -1$ thì $\overrightarrow{AB} = (-5;0;-5) \Rightarrow$ d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \\ z = 5 + t \end{cases}$

+ Với $t = 4$ thì $\overrightarrow{AB} = (0;5;5) \Rightarrow$ d: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 6: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến tam giác

HT 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC với tọa độ đỉnh C(3; 2; 3) và phương trình đường cao AH, phương trình đường phân giác trong BD lần lượt là: $d_1: \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 3}{1} = \dfrac{z - 3}{-2}$, $d_2: \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 4}{-2} = \dfrac{z - 3}{1}$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của ΔABC và tính diện tích của ΔABC.

Giải

Gọi mp(P) qua C và vuông góc với AH $\Rightarrow (P) \perp d_1 \Rightarrow (P): x + y - 2z + 1 = 0$

$B = (P) \cap d_2 \Rightarrow B(1;4;3) \Rightarrow$ phương trình $BC : \{x = 1 + 2t;\ y = 4 - 2t;\ z = 3$

Gọi mp(Q) qua C, vuông góc với d_2, (Q) cắt d_2 và AB tại K và M. Ta có:

$(Q) : x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow K(2;2;4) \Rightarrow M(1;2;5)$ (K là trung điểm của CM).

$\Rightarrow AB : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, do $A = AB \cap d_1 \Rightarrow A(1;2;5) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = 2\sqrt{3}$.

HT 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC với $A(1;-1;1)$ và hai đường trung tuyến lần lượt có phương trình là $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

Giải

Ta có $A \notin d_1, A \notin d_2$. Gọi $M \in d_1,\ N \in d_2$ lần lượt là trung điểm AC, AB.

$N(1-t;0;1+t) \Rightarrow B(1-2t;1;1+2t)$. $B \in d_1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow B(0;1;2)$

$M(2t;1-3t;2-2t) \Rightarrow C(4t-1;3-6t;3-4t)$. $C \in d_2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow C(1;0;1)$

Ta có: $AB = \sqrt{6},\ AC = 1$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A thì $\overrightarrow{DB} = -\sqrt{6}\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}};\frac{1}{1+\sqrt{6}};\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(\frac{-1}{1+\sqrt{6}};\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}};\frac{1}{1+\sqrt{6}}\right)$

Vậy phương trình đường thẳng AD là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2+\sqrt{6}} = \frac{z-1}{1}$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 7: Viết phương trình đường thẳng liên quan tới min - max

HT 78. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;1;-2), B(-1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d sao cho khoảng cách từ B tới Δ là nhỏ nhất.

Giải

d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;2;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) khi đó đường thẳng Δ đi qua A và H thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có: (P): $x + 2y - z - 5 = 0$. Giả sử $H(x;y;z)$.

Ta có: $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{BH}, \vec{u}_d \text{ cùng phương} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{u}_\Delta = 3\overrightarrow{AH} = (-2;5;8)$ $\Rightarrow$ Phương trình Δ: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{8}$.

HT 79. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất.

Giải

Giả sử d cắt Δ tại M $\Rightarrow M(-1+2t;3t;-1-t)$, $\overrightarrow{AM}=(-2+2t;3t-2;-t),\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$

Gọi H là hình chiếu của B trên d. Khi đó $d(B,d)=BH\leq BA$. Vậy $d(B,d)$ lớn nhất bằng BA

$\Leftrightarrow H\equiv A\Leftrightarrow AM\perp AB\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 2(-2+2t)-3(3t-2)+4t=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;6;-3)$ $\Rightarrow$ PT đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

HT 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm B và cắt đường thẳng Δ tại điểm C sao cho diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$. Điểm C ∈ Δ nên $C(-1+2t;1-t;2t)$.

$\overrightarrow{AC}=(-2+2t;-4-t;2t);\overrightarrow{AB}=(2;-2;6)$; $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=(-24-2t;12-8t;12-2t)$

$\Rightarrow \left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right\|=2\sqrt{18t^2-36t+216}\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right\|$ = $\sqrt{18(t-1)^2+198}$ ≥ $\sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ khi $t=1$ hay C(1; 0; 2) ⇒ Phương trình BC: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-6}{-4}$.

HT 81. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải

Ta có: $A(1;0;0)\in(P)$. Gọi VTCP của đường thẳng d là: $\vec{u}=(a;b;c),\ a^2+b^2+c^2\neq 0$

Ta có: $d\subset(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}_P=0\Leftrightarrow c=a+2b$

$\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)$; $\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AB}\right]=(-2a-7b;2a-2b;2a+b)$

$\Rightarrow d(B,d)=\dfrac{\left\|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\right\|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\dfrac{12a^2+24ab+54b^2}{2a^2+4ab+5b^2}}$

+ <u>TH1</u>: Nếu b = 0 thì $d(B,d)=\sqrt{6}$

+ <u>TH2</u>: Nếu $b\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{a}{b}\Rightarrow$ $d(B,d)=\sqrt{\dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}}=\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}$ ta suy ra được $\sqrt{6}\leq d(B,d)=f(t)\leq\sqrt{14}$

So sánh TH1 và TH2 ⇒ $\sqrt{6}\leq d(B,d)\leq\sqrt{14}$

Do đó:

a) $\min(d(B,d))=\sqrt{6}\Leftrightarrow b=0$. Chọn a =1 ⇒ c= 1

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

b) $\max(d(B,d)) = \sqrt{14} \Leftrightarrow a = -b$. Chọn b = –1 ⇒ a =1 , c = –1

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$

HT 82. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải

Gọi $M = d \cap \Delta$. Giả sử $M(-1+2t;t;2-t)$. VTCP của d: $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t-1;t+1;-t)$

$\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$; $\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}_d\right] = (1-t;1;4-2t)$

$$\Rightarrow d(B,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|} = \sqrt{\frac{12t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}} = \sqrt{f(t)}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}$. Ta có $\max f(t) = f(0) = 18;\quad \min f(t) = f(2) = \dfrac{1}{11}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{11}} \le d(B,d) \le \sqrt{18}$$

a) $\min(d(B,d)) = \sqrt{\dfrac{1}{11}} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1+3t \\ z = 2-2t \end{cases}$

b) $\max(d(B,d)) = \sqrt{18} \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

HT 83. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$, hai điểm $A(1;1;0), B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d, sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất.

Giải

Ta có VTCP của d là: $\vec{u}_d = (2;1;1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1;0;1)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên Δ ta có: $d(B,\Delta) = BH \le AB$.

Do đó khoảng cách từ B đến Δ lớn nhất khi $H \equiv A$.

Khi đó Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.

Ta có $\begin{cases} \Delta \perp d \\ \Delta \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ Có thể chọn VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right] = (1;-1;-1)$

$\Rightarrow$ PT của Δ là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases}$

HT 84. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;-1;2)$, cắt đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách giữa d và đường thẳng $\Delta_2 : \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ là lớn nhất.

Giải

Gọi $M = d \cap \Delta_1$. Giả sử $M(-1+2t;t;2-t)$.VTCP của d : $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t-1;t+1;-t)$

Δ_2 đi qua $N(5;0;0)$ và có VTCP $\vec{v}_\Delta = (2;-2;1)$; $\overrightarrow{AN} = (5;1;-2)$; $\left[\vec{v}_\Delta;\vec{u}_d\right] = (t-1;4t-1;6t)$

$$\Rightarrow d(\Delta_2, d) = \frac{\left|\left[\vec{v}_\Delta, \vec{u}_d\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{v}_\Delta, \vec{u}_d\right]\right|} = 3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}} = 3.\sqrt{f(t)}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}$. Ta suy ra được $\max f(t) = f(\frac{4}{37}) = \frac{26}{9}$

$\Rightarrow \max(d(\Delta, d)) = \sqrt{26} \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\{x = 29t;\ y = -1 - 41t;\ z = 2 + 4t$

HT 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải

Δ có VTCP $\vec{u}_\Delta = (1;-2;2)$. Gọi VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (a;b;c)$.

$d \mathbin{/\!/} (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng là α.

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

+ TH1: Nếu b = 0 thì $\cos\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{5}$

+ TH2: Nếu $b \neq 0$. Đặt $t = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2 - 4t + 2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t-4)^2}{5t^2 - 4t + 2}$. Ta suy ra được: $0 \le \cos\alpha = \sqrt{f(t)} \le \frac{5\sqrt{3}}{9}$

So sánh TH1 và TH2, ta suy ra: $0 \le \cos\alpha \le \frac{5\sqrt{3}}{9}$

Do đó:

a) $\min(\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d : $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$

b) $\max(\cos\alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$

HT 86. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa d và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải

Gọi $M = d \cap \Delta_1$. Giả sử $M(1+2t;2+t;-2-t)$.

VTCP của d : $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t+2;t+2;-1-t)$. Gọi $\alpha = \widehat{(d,\Delta_2)}$.

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}.\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}\frac{2}{3}.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2+14t+9}$. Ta suy ra được $\max f(t) = f(-\frac{9}{7}) = \frac{9}{5}$; $\min f(t) = f(0) = 0$

a) $\min(\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

b) $\max(\cos\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow t = -\frac{9}{7} \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d : $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$

PHẦN III VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định tâm và bán kính

HT 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy.

Giải

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy, ta có: $M(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM} = (-1;0;-3) \Rightarrow R = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Kết luận: PT mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

HT 88. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2t; \\ y = t; \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 - t; \\ y = t; \\ z = 0 \end{cases}$. Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Giải

Gọi MN là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) $\Rightarrow M(2;\ 1;\ 4);\ N(2;\ 1;\ 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$

HT 89. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm A(1; –2; 3) và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d.

Giải

d(A, (d)) = $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{4+196+100}}{\sqrt{4+1+1}} = 5\sqrt{2}$

PT mặt cầu tâm A (1; –2; 3), bán kính R = $5\sqrt{2}$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

HT 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S), có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Giải

d đi qua $N(-5;7;0)$ và có VTCP $\vec{u} = (2;-1;1)$; $\overrightarrow{MN} = (-9;6;-6)$.

Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ M đên đường thẳng d $\Rightarrow$ MH = $d(M,d) = 3$.

Bán kính mặt cầu (S): $R^2 = MH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 18$.

$\Rightarrow$ PT mặt cầu (S): $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$.

HT 91. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α). Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (α).

Giải

$(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=25$ có tâm $I(1;-2;4)$ và R = 5.

Khoảng cách từ I đến (α) là: $d(I,(\alpha))=3<R$ $\Rightarrow$ (α) và mặt cầu (S) cắt nhau.

Gọi J là điểm đối xứng của I qua (α). Phương trình đường thẳng IJ : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \end{cases}$

Toạ độ giao điểm H của IJ và (α) thoả

Mặt cầu (S′) có tâm J bán kính R′ = R = 5 nên có phương trình: $(S'): (x+3)^2+y^2+z^2=25$.

HT 92. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) biết rằng mặt phẳng Oxy và mặt phẳng (P): $z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính bằng 2 và 8.

Giải

Từ giả thiết ta có vô số mặt cầu (S) thoả YCBT. Gọi (S_0) là mặt cầu có tâm $I_0(0;0;m)$ thuộc trục Oz. Khi đó mp(Oxy) và mp(P) cắt (S_0) theo 2 đường tròn tâm $O_1 \equiv O(0;0;0)$, bán kính $R_1=2$ và tâm $O_2(0;0;2)$, bán kính $R_2=8$.

Gọi R là bán kính mặt cầu thì $\begin{cases} R^2=2^2+|m|^2 \\ R^2=8^2+|m-2|^2 \end{cases} \Rightarrow 4+m^2=64+(m-2)^2 \Rightarrow m=16$

$\Rightarrow R=2\sqrt{65}$ và $I_0(0;0;16)$. Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;16)$ (a, b ∈ R), bán kính $R=2\sqrt{65}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-16)^2=260$ (a, b ∈ R).

HT 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d, I cách (P) một khoảng bằng 2 và (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng 3.

Giải

Giả sử $I(-t;2t-1;t+2)\in d$, R là bán kính của (S), r là bán kính của (C).

Ta có: $d(I,(P))=2 \Leftrightarrow |-6t-5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{6} \\ t=-\dfrac{11}{6} \end{array}\right.$. $R^2=\left(d(I,(P))\right)^2+r^2=13$

+ Với $t = \frac{1}{6} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right) \Rightarrow$ (S): $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \left(y+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{13}{6}\right)^2 = 13$

+ Với $t = -\frac{11}{6} \Rightarrow I\left(\frac{11}{6};-\frac{14}{3};\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$ (S): $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(y+\frac{14}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{6}\right)^2 = 13$

HT 94. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và mặt phẳng (P): $2x+y-z+5=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua O, A, B và có khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{\sqrt{6}}$.

Giải

Giả sử (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

+ Từ O, A, B ∈ (S) suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;b;2)$.

+ $d(I,(P)) = \frac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|b+5|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-10 \end{array}\right.$

Vậy (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4z=0$ hoặc (S): $x^2+y^2+z^2-2x+20y-4z=0$

HT 95. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho các điểm $A(1;3;4), B(1;2;-3), C(6;-1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (α) và đi qua ba điểm A, B, C. Tính diện tích hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (α).

Giải

Goi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ta có :

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ I\in(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(1-a)^2+(2-b)^2+(-3-c)^2 \\ (1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(6-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2 \\ a+2b+2c-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+7c=6 \\ 5a-4b-3c=6 \\ a+2b+2c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(1;-1;1) \Rightarrow R^2=IA^2=25$$

$\Rightarrow$ Phương trình $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=25$

Tam giác ABC đều cạnh bằng $5\sqrt{2}$ nên $S_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{AB} = (0;-1;-7)$, $\overrightarrow{AC} = (5;-4;-3) \Rightarrow \vec{p} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-25;-35;5)$

$\cos((\alpha),(ABC)) = \left|\cos\left(\vec{n}_\alpha, \vec{p}\right)\right| = \frac{17}{15\sqrt{3}}$

Gọi S' là diện tích hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (α)

Ta có $S' = S_{ABC}.\cos((\alpha),(ABC)) = \frac{50\sqrt{3}}{4}\frac{17}{15\sqrt{3}} = \frac{85}{6}$ (đvdt)

HT 96. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng d có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm A(1; –1; 1).

Giải

Gọi I là tâm của (S). I ∈ d $\Rightarrow I(1+3t;-1+t;t)$. Bán kính R = IA = $\sqrt{11t^2 - 2t + 1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên: $d(I,(P)) = \frac{|5t+3|}{3} = R$

$$\Leftrightarrow 37t^2 - 24t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \Rightarrow R = 1 \\ t = \frac{24}{37} & \Rightarrow R = \frac{77}{37} \end{array}\right..$$

Vì (S) có bán kính nhỏ nhất nên chọn t = 0, R = 1. Suy ra I(1; –1; 0).

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

HT 97. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên d, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua điểm A(2; –1; 0).

Giải

Gọi I là tâm của (S) $\Rightarrow I\left(1+t;t-2;t\right)$. Ta có d(I, (P)) = AI $\Leftrightarrow t = 1;\ t = \frac{7}{13}$.

Vậy: $(S):\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$

hoặc $(S):\ \left(x - \frac{20}{13}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{13}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{13}\right)^2 = \frac{121}{169}$.

HT 98. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-2)$, đường thẳng Δ: $2x - 2 = y + 3 = z$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu vi bằng 8π. Từ đó lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tiếp xúc với (S).

Giải

Ta có: $d = d(I,(P)) = 3$. Gọi r là bán kính hình tròn thiết diện. Ta có: $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Nhận thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với (Δ) tại điểm $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Do đó: (Q) chứa (Δ) và tiếp xúc với (S) đi qua $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{MI}\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};\frac{10}{3}\right)$

$\Rightarrow$ PT mặt phẳng (Q): $6x-33y+30z-105=0$.

HT 99. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và 2 mặt phẳng (P): $x+2y+2z+3=0$ và (Q): $x+2y+2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

Giải

Giả sử: $I(t;-1;-t)\in d$. Vì (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I,(P))=d(I,(Q))=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|1-t|}{3}=\dfrac{|5-t|}{3}\Leftrightarrow t=3$. Suy ra: $R=\dfrac{2}{3}, I(3;-1;-3)$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+3\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

HT 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-2y-2z+10=0$, hai đường thẳng (Δ_1): $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, ($\Delta_2$): $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc (Δ_1), tiếp xúc với (Δ_2) và mặt phẳng (P).

Giải

$\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(1;1;4)$.

Giả sử $I(2+t;t;1-t)\in\Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cẩu (S).

Ta có: $\overrightarrow{AI}=(t;t;4-t)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}_2\right]=(5t-4;4-5t;0)\Rightarrow d(I,\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}_2\right]\right|}{\left|\vec{u}_2\right|}=\dfrac{|5t-4|}{3}$

$d(I,(P))=\dfrac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|t+10|}{3}$

(S) tiếp xúc với Δ_2 và (P) $\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=d(I,(P))\Leftrightarrow|5t-4|=|t+10|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{7}{2}\\t=-1\end{array}\right.$.

- Với $t=\dfrac{7}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$, $R=\dfrac{9}{2}\Rightarrow$

  PT mặt cầu (S): $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

- Với $t=-1\Rightarrow I(1;-1;2), R=3\Rightarrow$ PT mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định các hệ số của phương trình

HT 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm A(3;1;1), B(0;1;4), C(–1;–3;1). Lập phương trình của mặt cầu (S) đi qua A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (P): x + y – 2z + 4 = 0.

Giải

PT mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

(S) qua A: $6a + 2b + 2c - d - 11 = 0$

(S) qua B: $2b + 8c - d - 17 = 0$

(S) qua C: $2a + 6b - 2c + d + 11 = 0$

Tâm I ∈ (P): $a + b - 2c + 4 = 0$

Giải ra ta được: a = 1, b = –1, c = 2, d = –3. Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$

HT 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2;–1; 3), D(1;–1; 0). Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giải

Ta tính được $AB = CD = \sqrt{10}, AC = BD = \sqrt{13}, AD = BC = \sqrt{5}$.

Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau.

Từ đó ABCD là một tứ diện gần đều.

Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là trọng tâm G của tứ diện này.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là $G\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$, bán kính là $R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 3: Các bài toán liên quan đến mặt cầu

HT 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): 2x – 2y – z – 4 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Giải

I (1; 2; 3); R = $\sqrt{1+4+9+11} = 5$; d (I; (P)) = $\frac{|2(1) - 2(2) - 3 - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 3$ < R = 5.

Vậy (P) cắt (S) theo đường tròn (C)

Phương trình d qua I, vuông góc với (P) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Gọi J là tâm, r là bán kính đường tròn (C). J ∈ d $\Rightarrow$ J (1 + 2t; 2 – 2t; 3 – t)

J ∈ (P) $\Rightarrow$ 2(1 + 2t) – 2(2 – 2t) – 3 + t – 4 = 0 $\Rightarrow$ t = 1

Vậy tâm đường tròn là J (3; 0; 2) , bán kính r = $\sqrt{R^2 - IJ^2} = 4$

HT 104. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2). Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Giải

Gọi I , r là tâm và bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

$$V_{OABC} = V_{IOAB} + V_{IOBC} + V_{OCA} + V_{ABC} = \frac{1}{3}.r.S_{OAB} + \frac{1}{3}.r.S_{OBC} + \frac{1}{3}.r.S_{OCA} + \frac{1}{3}.r.S_{ABC} = \frac{1}{3}.r.S_{TP}$$

Mặt khác: $V_{OABC} = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (đvtt); $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA} = \frac{1}{2}.OA.OB = 2$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.8 = 2\sqrt{3}$ (đvdt) $\Rightarrow$ $S_{TP} = 6 + 2\sqrt{3}$ (đvdt)

Do đó: $r = \frac{3V_{OABC}}{S_{TP}} = \frac{4}{6+2\sqrt{3}}$ (đv độ dài)

PHẦN IV TÌM ĐIỂM THOẢ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Xác định điểm thuộc mặt phẳng

HT 105. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(0; 0;–3) và B(2; 0;–1). Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 3x - y - z + 1 = 0$ để ΔMAB là tam giác đều.

Giải

Giả sử $M(a;b;c) \in (P) \Rightarrow 3a - b - c + 1 = 0$ (1).

$$\Delta MAB \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = AB^2 \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8c = -4 \\ 6c = -1 \\ 3a - b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{1}{6}\right)$$

HT 106. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1;2;3) và B(3;4;1). Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z - 1 = 0$ để ΔMAB là tam giác đều.

Giải

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB ⇒ (Q): $x + y - z - 3 = 0$

d là giao tuyến của (P) và (Q) ⇒ d: $\begin{cases} x = 2 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}$

M ∈ d ⇒ $M(2; t+1; t) \Rightarrow AM = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

Vì AB = $\sqrt{12}$ nên Δ MAB đều khi MA = MB = AB

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 8t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{18}}{2} \quad \Rightarrow M\left(2; \frac{6 \pm \sqrt{18}}{2}; \frac{4 \pm \sqrt{18}}{2}\right).$$

HT 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;5;4)$, $B(3;1;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$ sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích bằng $2\sqrt{17}$.

Giải

Giả sử: $C(a; b; a - b - 1) \in (P)$. $AB = 4$.

$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (b-5)^2 + (a-b-5)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2 + (a-b-5)^2} \Rightarrow b = 3$$

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I(3;3;4)$.

$$S_{IAB} = 2\sqrt{17} \Rightarrow CI.AB = 4\sqrt{17} \Rightarrow CI = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (8-a)^2} = \sqrt{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = 7 \end{array}\right.$$

+ Với $a = 4 \Rightarrow C(4;3;0)$ + $a = 7 \Rightarrow C(7;3;3)$.

HT 108. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm A(0; 1; 2), B(2; –2; 1), C(–2; 0; 1). Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho MA = MB = MC .

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-1), \overrightarrow{AC} = (-2;-1;-1) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;-8)$ là 1 VTPT của (ABC)

Suy ra phương trình (ABC): $x + 2y - 4z + 6 = 0$. Giả sử M(x; y; z).

Ta có: $\begin{cases} \text{MA} = \text{MB} = \text{MC} \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow M(2;3;-7)$

HT 109. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-2;1)$, $B(2;0;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho MA =MB và $(ABM) \perp (P)$.

Giải

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB $\Rightarrow \vec{n}_Q = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ là một VTPT của (Q).

$I(1;-1;2)$ là trung điểm của AB $\Rightarrow$ Phương trình $(Q): x + y + z - 2 = 0$

Gọi (R) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (P). $\vec{n}_R = \left[\vec{n}_P; \vec{n}_Q\right] = (0;3;-3)$ là VTPT của (R)

$\Rightarrow$ Phương trình của $(R): y - z + 3 = 0$

Toạ độ của M là nghiệm cuả hệ: $\begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{17}{6}\right)$

HT 110. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm A(2;0;0), C(0;4;0), S(0; 0; 4).Tìm tọa độ điểm B trong mp(Oxy) sao cho tứ giác OABC là hình chữ nhật. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, B, C, S.

Giải

OABC là hình chữ nhật $\Rightarrow$ B(2; 4; 0) $\Rightarrow$ Tọa độ trung điểm H của OB là H(1; 2; 0), H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông OCB.

+ Đường thẳng vuông góc với mp(OCB) tại H cắt mặt phẳng trung trực của đoạn OS (mp có phương trình z = 2) tại I $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu đi qua 4 điểm O, B, C, S.

+ Tâm I(1; 2; 2) và R = OI = $\sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3$ $\Rightarrow$ (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$

HT 111. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M $\in$ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Giải

A, B nằm cùng phía đối với (P).

Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua (P) ⇒ $A'(3;1;0)$

Để M ∈ (P) có MA + MB nhỏ nhất thì M là giao điểm của (P) với A′B ⇒ $M(2;2;-3)$.

HT 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t; \\ y = 1 - t; \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ, xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì P = AB + AM + BM.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi AM + BM nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M\left(-1 + 2t; 1 - t; 2t\right)$. $AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = \left(3t; 2\sqrt{5}\right)$ và $\vec{v} = \left(-3t + 6; 2\sqrt{5}\right)$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $\vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{3t}{-3t+6} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ và $\min(AM + BM) = 2\sqrt{29}$. Vậy khi M(1;0;2) thì minP = $2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$

HT 113. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 8 = 0$ và các điểm $A(-1;2;3)$, $B(3;0;-1)$. Tìm điểm M ∈ (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB ⇒ $I(1;\ 1;\ 1)$. Ta có: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Do đó: $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất ⇔ IM^2 nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM}, \vec{n}_P \ \ cùng\ \ phương \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \\ x - 2y + 2z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$. Vậy M(0; 3; –1).

HT 114. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

Giải

Giả sử I là điểm thoả mãn: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IB}\ \Rightarrow I\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

Ta có: $MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$. Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi.

Vậy MA^2+2MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất

MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) $\Leftrightarrow M\left(\frac{5}{9};\frac{14}{9};\frac{17}{9}\right)$.

HT 115. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với A(1; 2; 5), B(1; 4; 3), C(5; 2; 1) và mặt phẳng (P): $x-y-z-3=0$. Gọi M là một điểm thay đổi trên mặt phẳng (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=MA^2+MB^2+MC^2$. Khi đó tìm toạ độ của M.

Giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC ⇒ G$\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3};3\right)$; $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{56}{9}+\frac{32}{9}+\frac{104}{9}=\frac{64}{3}$

Ta có $F=MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

F nhỏ nhất ⇔ MG² nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu của G lên (P)

$$\Leftrightarrow MG=d(G,(P))=\frac{\left|\frac{7}{3}-\frac{8}{3}-3-3\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{19}{3\sqrt{3}}$$

Vậy F nhỏ nhất bằng $3.\left(\frac{19}{3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{64}{3}=\frac{553}{9}$ khi M là hình chiếu của G lên (P).

HT 116. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;0;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(2;4;2)$ và mặt phẳng (P): $x+y+2z+2=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $M(x;y;z)\in(P)\ \Rightarrow x+y+2z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)+(y-1)+2(z-1)+6=0$ (1)

Ta có: $T=3(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z)+31=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]+22$ (2)

Từ (1), áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho các bộ số: $(1;1;2)$ và $(x-1;y-1;z-1)$, ta được:

$$(-6)^2=\left[1(x-1)+1(y-1)+2(z-1)\right]^2\le(1+1+4)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$\Rightarrow T\ge 3.\frac{6^2}{6}+22=40$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}\\ x+y+2z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M(0;0;-1)$.

HT 117. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9), C(2; 2; 2) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x+y+z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Giải

Cách 1: Gọi I là điểm thoả: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right)$

Ta có: T = $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Do đó: T nhỏ nhất ⇔ $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu của I trên (P).

Ta tìm được: $M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$. Khi đó $\min T=\frac{43\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2: Giả sử $M(x;y;z)\in(P) \Rightarrow x+y+z-3=0$ (1)

Khi đó: $MI^2=\left(x-\frac{23}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z-\frac{25}{6}\right)^2$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho (1), ta được:

$$\left(-\frac{43}{6}\right)^2=\left[1.\left(x-\frac{23}{6}\right)+1.\left(y-\frac{13}{6}\right)+1.\left(z-\frac{25}{6}\right)\right]^2\le 3\left[\left(x-\frac{23}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2+\left(z-\frac{25}{6}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow MI^2\ge 3\left(\frac{43}{18}\right)^2 \Leftrightarrow MI\ge\frac{43\sqrt{3}}{18}.$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ $\begin{cases}\dfrac{x-\frac{23}{6}}{1}=\dfrac{y-\frac{13}{6}}{1}=\dfrac{z-\frac{25}{6}}{1}\\ x+y+z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{13}{9}\\ y=-\frac{2}{9}\\ z=\frac{16}{9}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$

Vậy $\min T=\frac{43\sqrt{3}}{3}$ khi $M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$.

HT 118. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và ba điểm $A(2;1;3), B(0;-6;2), C(1;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất.

Giải

Dễ thấy A,B,C không thẳng hàng. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, thì $G(1;-2;3)$.

Khi đó với mọi $M\in(P)$ ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$,

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất ⇔$\left|\overrightarrow{MG}\right|$ đạt giá trị bé nhất

⇔ M là hình chiếu vuông góc của G trên (P).

(P) có VTPT $\vec{n} = (1;1;1)$. Giả sử $M(x_0;y_0;z_0) \in (P) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0$ (1).

M là hình chiếu của G trên (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \left(x_0 - 1; y_0 + 2; z_0 - 3\right)$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 - 1}{1} = \frac{y_0 + 2}{1} = \frac{z_0 - 3}{1} = \frac{(x_0 - 1) + (y_0 + 2) + (z_0 - 3)}{1 + 1 + 1} = \frac{(x_0 + y_0 + z_0 - 1) - 1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{2}{3}, y_0 = \frac{-7}{3}, z_0 = \frac{8}{3}$. Vậy $M\left(\frac{2}{3};\frac{-7}{3};\frac{8}{3}\right)$.

HT 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz,$ cho mặt phẳng (P): $3x - 3y + 2z + 37 = 0$ và các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

Giải

Giả sử $M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow 3x - 3y + 2z + 37 = 0$ (1)

Khi đó $S = 3\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - 5\right]$.

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho (1) ta được:

$$(-44)^2 = \left[3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-2)\right]^2 \le (9 + 9 + 4)\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2\right]$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \ge \frac{44^2}{22} = 88.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow M(4;7;-2)$.

Vậy $\min S = 3.88 - 5 = 259$ khi $M(4;7;-2)$.

HT 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz,$ cho các điểm $A(0;1;2), B(-1;1;0)$ và mặt phẳng (P): $x - y + z = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho ΔMAB vuông cân tại B.

Giải

Giả sử $M(x;y;z) \in (P)$. $\overrightarrow{BA} = (1;0;2), \overrightarrow{MB} = (x+1; y-1; z)$.

Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = 0 \\ BA = BM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-4 + \sqrt{10}}{6} \\ z = \frac{-2 - \sqrt{10}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-2 + \sqrt{10}}{6} \\ z = \frac{-2 + \sqrt{10}}{6} \end{cases}$

Dạng 2: Xác định điểm thuộc đường thẳng

HT 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=t\\z=-1-2t\end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$.

Gọi d ′ là hình chiếu của d trên mặt phẳng (P). Tìm toạ độ điểm H thuộc d ′ sao cho H cách điểm $K(1;1;4)$ một khoảng bằng 5.

Giải

Gọi A = d ∩ (P) ⇒ $A(4;-2;3)$. PT hình chiếu d′ của d trên (P): $\begin{cases}x=4+7t\\y=-2-2t\\z=3+5t\end{cases}$.

Giả sử $H(4+7t;-2-2t;3+5t)\in d'$. $KH^2=25\Leftrightarrow t=\dfrac{-11\pm\sqrt{238}}{39}$ ⇒ H.

HT 122. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1; 4; 2),B(–1; 2; 4) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho: $MA^2+MB^2=28$.

Giải

PTTS của $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$. $M\in\Delta\Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)$

Ta có: $MA^2+MB^2=28\Leftrightarrow 12t^2-48t+48=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(-1;0;4)$

HT 123. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;0),B(2;2;2),C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm điểm M trên d để thể tích tứ diện MABC bằng 3.

Giải

Ta có: $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+2t\end{cases}$. Giả sử $M(1+2t;\,-2-t;\,3+2t)\in d$

$\vec{n}=-\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}\right]=(1;\,2;\,-2)$

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{9}{2}$. PT mặt phẳng (ABC): $x+2y-2z-2=0$. $h=d(M,(ABC))=\dfrac{|-4t-11|}{3}$

$V_{MABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{2}.\dfrac{|4t+11|}{3}=3\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{4}$ hoặc $t=-\dfrac{17}{4}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};-\frac{11}{2}\right)$.

HT 124. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M(2; 1; 2) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$. Tìm trên d hai điểm A, B sao cho tam giác ABM đều.

Giải

Gọi H là hình chiếu của M trên d. Ta có: MH = $d(M,d)=\sqrt{2}$.

Tam giác ABM đều, nhận MH làm đường cao nên: MA = MB = AB = $\frac{2MH}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Do đó, toạ độ của A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}\\(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3}\end{cases}$.

Giải hệ này ta tìm được: $A\left(2+\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3};3+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $B\left(2-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{3};3-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

HT 125. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm A(0; 1; 3) và đường thẳng d: $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3\end{cases}$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC đều.

Giải

d có VTCP $\vec{u}_d=(-1;2;0)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Giả sử $H(1-t;\ 2+2t;3)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(1-t;1+2t;0)$

Mà AH $\perp$ d nên $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}_d\Rightarrow\ -1(1-t)+2(1+2t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\Rightarrow H\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};3\right)$

$\Rightarrow$ AH = $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Mà ΔABC đều nên BC = $\frac{2AH}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$ hay BH = $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Giả sử $B(1-s;2+2s;3)$ thì $\left(-\frac{1}{5}-s\right)^2+\left(\frac{2}{5}+2s\right)^2=\frac{15}{25}$

$\Leftrightarrow 25s^2+10s-2=0\Leftrightarrow s=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{5}$

Vậy: $B\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$ và $C\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$

hoặc $B\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$ và $C\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$

HT 126. Trong không gian với hệ toạ $Oxyz,$ tìm trên Ox điểm A cách đều đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) : $2x-y-2z=0$.

Giải

Gọi A(a; 0; 0) $\in Ox \Rightarrow d(A;(P))=\frac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|2a|}{3}$; $d(A;d)=\frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}$

d(A; (P)) = d(A; d) $\Leftrightarrow \frac{|2a|}{3}=\frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}\Leftrightarrow 4a^2-24a+36=0$

$\Leftrightarrow 4(a-3)^2=0\Leftrightarrow a=3$. Vậy có một điểm A(3; 0; 0).

HT 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng Δ_1 : $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+9}{6}$; Δ_2 : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Giải

M (–1 + t; t; –9 + 6t) $\in\Delta_1$; Δ_2 qua A (1; 3; –1) có véctơ chỉ phương $\vec{a}$ = (2; 1; –2)

$\overrightarrow{AM}$ = (t – 2; t – 3; 6t – 8) $\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM};\vec{a}\right]$ = (14 – 8t; 14t – 20; 4 – t)

Ta có : d (M, Δ_2) = d (M, (P)) $\Leftrightarrow \sqrt{261t^2-792t+612}=|11t-20|$

$\Leftrightarrow$ $35t^2$ – 88t + 53 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 1 hay t = $\frac{53}{35}$. Vậy M (0; 1; –3) hay M $\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$.

HT 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ và $\Delta_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 cắt Δ_1 tại A, cắt Δ_2 tại B. Tình diện tích ΔOAB.

Giải

Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1=(2;-1;1)$, Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2=(1;7;-1)$

Giả sử $A(1+2t_1;-t_1;-2+t_1)\in\Delta_1$, $B(-1+t_2;1+7t_2;3-t_2)\in\Delta_2$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow A(1;0;-2)\\ t_2=0\Rightarrow B(-1;1;3)\end{cases}\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

HT 129. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và các đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$; $d_2:\frac{x-5}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z+5}{-5}$. Tìm các điểm $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho MN // (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

Giải

PTTS của d_1 là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$. M ∈ d_1 nên tọa độ của M $\left(1 + 2t; 3 - 3t; 2t\right)$.

Theo đề: $d(M;(P)) = \dfrac{\left|1 + 2t - 2(3 - 3t) + 4t - 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\left|12t - 6\right|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right.$

+ Với t = 1 ta được $M_1\left(3;0;2\right)$; + Với t = 0 ta được $M_2\left(1;3;0\right)$

• Ứng với M_1, điểm $N_1 \in d_2$ cần tìm phải là giao của d_2 với mp qua M_1 và // (P),

Gọi mp này là (Q_1). PT (Q_1) là: $(x - 3) - 2y + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z - 7 = 0 \ \ (1)$.

PTTS của d_2 là: $\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 4t \\ z = -5 - 5t \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được: t = –1. Điểm N_1 cần tìm là $N_1(-1;-4;0)$.

• Ứng với M_2, tương tự tìm được $N_2(5;0;-5)$.

HT 130. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 1 = 0$ và các đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-2}$, $d_2 : \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{2}$. Tìm các điểm $A \in d_1$, $B \in d_2$ sao cho AB // (P) và AB cách (P) một khoảng bằng 1.

Giải

Giả sử: $A(2t_1 + 1, t_1 + 3, -2t_1) \in d_1$, $B(3t_2 + 5, 4t_2, 2t_2 - 5) \in d_2$

$\overrightarrow{AB} = (3t_2 - 2t_1 + 4, 4t_2 - t_1 - 3, 2t_2 + 2t_1 - 5)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 2(3t_2 - 2t_1 + 4) - 4t_2 + t_1 + 3 + 2(2t_2 + 2t_1 - 5) = 0 \Leftrightarrow 6t_2 + t_1 + 1 = 0$

$AB \,//\, (P) \Rightarrow d(AB,(P)) = d(A,(P)) = \dfrac{\left|4t_1 + 2 - t_1 - 3 - 4t_1 - 1\right|}{3} = \dfrac{\left|t_1 + 2\right|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -5 \\ t_1 = 1 \end{array}\right.$

• Với $t_1 = -5 \Rightarrow t_2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow A(-9;-2;10), B\left(7;\dfrac{8}{3};\dfrac{-11}{3}\right)$

• Với $t_1 = 1 \Rightarrow t_2 = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow A(3;4;-2), B\left(4;\dfrac{-4}{3};\dfrac{-17}{3}\right)$

HT 131. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm A(1; 5; 4), B(0; 1; 1), C(1; 2; 1). Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho độ dài đoạn thẳng CD nhỏ nhất.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;-3)$. Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases}x=1-t\\y=5-4t\\z=4-3t\end{cases}$.

Gọi $D(1-a;5-4a;4-3a)\in AB \Rightarrow \overrightarrow{DC}=(a;4a-3;3a-3)$.

Độ dài đoạn CD ngắn nhất ⇔ D là hình chiếu vuông góc của C trên cạnh AB ⇔ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}$

⇔ $-a-16a+12-9a+9=0 \Leftrightarrow a=\frac{21}{26}$. Vậy: $D\left(\frac{5}{26};\frac{46}{26};\frac{41}{26}\right)$.

HT 132. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1; –1; 2), B(3; – 4; –2) và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1-8t\end{cases}$.

Tìm điểm I trên đường thẳng d sao cho IA + IB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)\Rightarrow$ AB // d. Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua d.

Ta có: IA + IB = IA_1 + IB $\geq A_1B$.

Do đó IA + IB đạt giá trị nhỏ nhất bằng A_1B.

Khi đó A_1, I, B thẳng hàng $\Rightarrow$ I là giao điểm của A_1B và d. Vì AB // d nên I là trung điểm của A_1B.

Gọi H là hình chiếu của A lên d.

Tìm được H $\left(\frac{36}{29};\frac{33}{29};\frac{15}{29}\right)$. A' đối xứng với A qua H nên A'$\left(\frac{43}{29};\frac{95}{29};-\frac{28}{29}\right)$.

I là trung điểm của A'B suy ra I$\left(\frac{65}{29};\frac{-21}{58};\frac{-43}{29}\right)$.

HT 133. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất.

Giải

PTTS của Δ: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$. Gọi $M(-1+2t;1-t;2t)\in\Delta$.

Diện tích ΔMAB là $S=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right\|=\sqrt{18t^2-36t+216}=\sqrt{18(t-1)^2+198}\geq\sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ khi $t=1$ hay M(1; 0; 2).

HT 134. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz,$ cho ba điểm $A(5;8;-11)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;1;-6)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $M(2t+1;2t+2;t+1)\in d\Rightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(-2t-1;-2t-4;-t)$

$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ = $\sqrt{(2t+1)^2+(2t+4)^2+t^2}=\sqrt{9\left(t+\frac{10}{9}\right)^2+\frac{53}{9}}\geq\frac{\sqrt{53}}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=-\frac{10}{9}\Rightarrow M\left(-\frac{11}{9};-\frac{2}{9};-\frac{1}{9}\right)$

HT 135. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz,$ cho $(P): x+2y-z+5=0$ điểm A(–2; 3; 4) và đường thẳng $(d):\frac{x+3}{2}=y+1=z-3$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trên (P) đi qua giao điểm của (d) và (P) đồng thời vuông góc với d. Tìm trên Δ điểm M sao cho khoảng cách AM ngắn nhất.

Giải

PTTS của d: $\begin{cases}x=2t-3\\y=t-1\\z=t+3\end{cases}$. Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(-1;0;4)$

(d) có VTCP là $\vec{a}=(2;1;1)$, (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;2;-1)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{n}\right]=(-3;3;3)$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ $\Rightarrow\vec{u}=(-1;1;1)$ $\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1-u\\y=u\\z=4+u\end{cases}$.

Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(-1-u;u;4+u)$, $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1-u;u-3;u)$

AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM\perp\Delta$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-1(1-u)+1(u-3)+1.u=0\Leftrightarrow u=\frac{4}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{-7}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$

HT 136. Trong không gian $Oxyz,$ cho hai điểm A(–1; –1; 2), B(–2; –2; 1) và mặt phẳng (P) có phương trình $x+3y-z+2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm điểm M thuộc Δ sao cho độ dài đoạn thẳng OM là nhỏ nhất.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(\frac{-3}{2};\frac{-3}{2};\frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-1)$

$\Rightarrow$ PT (Q): $x+y+z+\frac{3}{2}=0$

Δ là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow$ PTTS của Δ: $\begin{cases} x = -\dfrac{7}{4} + 2t;\ y = -t;\ z = \dfrac{1}{4} - t \end{cases}$.

Giả sử $M\left(-\dfrac{7}{4} + 2t; -t; \dfrac{1}{4} - t\right) \in \Delta;\quad OM = \sqrt{6t^2 - \dfrac{15}{2}t + \dfrac{25}{8}}$.

OM nhỏ nhất khi $t = \dfrac{5}{8} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{8}; -\dfrac{3}{8}\right)$.

HT 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $E(2;1;5)$, $F(4;3;9)$. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $2x + y - z + 1 = 0$ và (Q): $x - y + 2z - 7 = 0$. Tìm điểm I thuộc Δ sao cho: $|IE - IF|$ lớn nhất.

Giải

PTTS của Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$. PTTS của EF: $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 5 + 2t' \end{cases}$.

Xét hệ: $\begin{cases} 1 + t = 2 + t' \\ -5t = 1 + t' \\ 3 - 3t = 5 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ EF cắt Δ tại A(1;0;3).

Trong mp(Δ ,EF) mọi điểm I $\in \Delta$ ta có $|IE - IF| \le$ EF (hiệu 2 cạnh trong 1 tam giác nhỏ hơn cạnh thứ 3).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ I, E, F thẳng hàng, từ đó suy ra I trùng A.

Vậy điểm I(1;0;3).

HT 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;0;3)$, $B(0;3;3)$. Tìm điểm M $\in$ d sao cho:

a) $MA + MB$ nhỏ nhất. b) $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất. c) $\left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Giải

a) PTTS của d: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. Gọi $M(t;t;t) \in d$. Ta có: $P = \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2 + 2} + \sqrt{(t-2)^2 + 2}\right)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{(t-1)^2 + 2} + \sqrt{(t-2)^2 + 2} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2 + 2}} + \dfrac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2 + 2}}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2 + 2}} = -\frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2 + 2}} \Leftrightarrow \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2 + 2}} = \frac{-(t-2)}{\sqrt{\left[-(t-2)\right]^2 + 2}} \qquad (*)$$

Xét hàm số $g(u) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}$. Ta có $g'(u) = \left(\sqrt{u^2 + 2} - u.\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}\right).\dfrac{1}{u^2 + 2} = \dfrac{2}{\sqrt{(u^2 + 2)^3}} > 0$ nên hàm số g đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*), ta có $g(t-1) = g\left[-(t-2)\right] \Leftrightarrow t-1 = -t+2 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

Dựa vào BBT của hàm số f ta suy ra $\min f(t) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$.

Vậy $\min(MA+MB) = 3\sqrt{3}$ đạt được tại $t = \dfrac{3}{2}$, tức là $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

b) Tương tự câu 1), ta tính được $Q = MA^2 + 2MB^2 = 9t^2 - 30t + 45 = (3t-5)^2 + 20$.

$\Rightarrow \min Q = 20$ khi $t = \dfrac{5}{3}$, tức $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

c) Theo câu 1) , ta có $\overrightarrow{MA} = (-t;-t;3-t)$, $\overrightarrow{MB} = (-t;3-t;3-t)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (t;t-6;t-3)$ $\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{3t^2 - 18t + 45} = \sqrt{3(t-3)^2 + 18} \geq 3\sqrt{2}$

Vậy $\min\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = 3\sqrt{2}$ khi $t = 3$, tức $M(3;3;3)$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 3: Xác định điểm thuộc mặt cầu

HT 139. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng (d) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2x - 2y - z + 1 = 0$, (Q): $x + 2y - 2z - 4 = 0$ và . Tìm m để (S) cắt (d) tại 2 điểm M, N sao cho độ dài MN = 8.

Giải

(S) tâm I(–2;3;0), bán kính R= $\sqrt{13-m} = IM$ $(m < 13)$. Gọi H là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ MH= 4 $\Rightarrow$ IH = d(I; d) = $\sqrt{-m-3}$

d qua A(0;1;-1), VTCP $\vec{u} = (2;1;2) \Rightarrow$ d(I; d) = $\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{AI}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 3$.

Vậy : $\sqrt{-m-3}$ =3 $\Leftrightarrow$ m = –12.

HT 140. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + y - z + 3 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 2z + 23 = 0$. Tìm trên (S) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó hãy viết phương trình mặt cầu (T) có tâm M và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;4;1)$, bán kính R = $\sqrt{3}$

Gọi d là đường thẳng qua I vuông góc với (P) $\Rightarrow$ PTTS của d: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Khi đó M là giao điểm của d với (S) ⇒ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+t \\ z = 1-t \\ x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=4 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} t=-1 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow M_1(4;5;0), M_2(2;3;2)$$

Ta thấy $d(M_1,(P)) = 4\sqrt{3} > d(M_2,(P)) = 2\sqrt{3}$. Vậy $M(4;5;0)$ là điểm cần tìm.

Mặt cầu (T) có $R' = \sqrt{MH^2+HE^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2} = 8 \Rightarrow (T): (x-4)^2+(y-5)^2+z^2 = 64$

HT 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình là $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0, (P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm M di động trên (S) và điểm N di động trên (P). Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN. Xác định vị trí của M, N tương ứng.

Giải

Mặt cầu (S) tâm I(2;–1;3) và có bán kính R = 3.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): $d = d\left(I,\left(P\right)\right) = \dfrac{\left|2.2+2.(-1)-3+16\right|}{3} = 5 \Rightarrow d > R$.

Do đó (P) và (S) không có điểm chung. Do vậy, min MN = d –R = 5 –3 = 2.

Trong trường hợp này, M ở vị trí M_0 và N ở vị trí N_0.

Dễ thấy N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và M_0 là giao điểm của đoạn thẳng IN_0 với mặt cầu (S).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P), thì N_0 là giao điểm của Δ và (P).

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{n}_P = \left(2;2;-1\right)$ và qua I nên có phương trình là $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+2t \\ z = 3-t \end{cases}$.

Tọa độ của N_0 ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$2(2+2t)+2(-1+2t)-(3-t)+16=0 \Leftrightarrow 9t+15=0 \Leftrightarrow t = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

Suy ra $N_0\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{13}{3};\dfrac{14}{3}\right)$. Ta có $\overrightarrow{IM_0} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IN_0}$. Suy ra $M_0(0;-3;4)$

HT 142. Trong không gian tọa độ $Oxyz,$ cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

Giải

(S) có tâm I(1; 0; –1), bán kính $R = 2$. PT mp(ABC): $2x-2y+z+1=0$

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}d(D;(ABC)).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất ⇔ $d(D;(ABC))$ lớn nhất.

Gọi D_1D_2 là đường kính của (S) vuông góc với mp(ABC). Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì

$d(D;(ABC)) \le \max\left\{d(D_1;(ABC));\ d(D_2;(ABC))\right\}$.

Dấu "=" xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2.

D_1D_2 đi qua I(1;0;–1), và có VTCP là $\vec{n}_{ABC} = (2;-2;1)$

$\Rightarrow D_1D_2 : \left\{x = 1 + 2t; y = -2t; z = -1 + t\right.$

Tọa độ D_1 và D_2 thỏa: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \\ t = \dfrac{-2}{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow D_1\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-4}{3};\dfrac{-1}{3}\right); D_2\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d(D_1;(ABC)) > d(D_2;(ABC))$. Vậy điểm $D\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

Dạng 4: Xác định điểm trong không gian

HT 143. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (α): $3x + 2y - z + 4 = 0$ và hai điểm A(4;0;0) , B(0;4;0) .Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và (α).

Giải

I(2;2;0). PT đường thẳng KI: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (α): H(–1;0;1). Giả sử $K(x_o;y_o;z_o)$.

Ta có: KH = KO $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0 - 2}{3} = \dfrac{y_0 - 2}{2} = \dfrac{z_0}{-1} \\ \sqrt{(x_0+1)^2 + y_0^2 + (z_0-1)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

HT 144. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm A(2;4;–1), B(1;4;–1), C(2;4;3), D(2;2;–1). Tìm tọa độ điểm M để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi G là trọng tâm của ABCD ta có: $G\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

$\ge GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv G\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3};0\right)$.

HT 145. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + y + z + 3 = 0$ và điểm A(0; 1; 2). Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

Giải

(P) có VTPT $\vec{n} = (1;1;1)$. Giả sử A′(x; y; z).

Gọi I là trung điểm của AA′ $\Rightarrow I\left(\dfrac{x}{2};\dfrac{y+1}{2};\dfrac{z+2}{2}\right)$.

A′ đối xứng với A qua (P) $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AA'}, \vec{n} \text{ cùng phương}\\ I \in (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}\\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y+1}{2} + \dfrac{z+2}{2} + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -4\\ y = -3\\ z = -2\end{cases}$

Vậy: A′(–4; –3; –2).

HT 146. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2 = 0$. Tìm toạ độ của điểm M biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

Giải

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$.

Ta có: $\begin{cases}MA = MB\\ MB = MC\\ MA = d(M,(\alpha))\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_0-1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2 & (1)\\ x_0^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0-3)^2 + (z_0-2)^2 & (2)\\ (x_0-1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = \dfrac{(x_0+2y_0+2)^2}{5} & (3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 2\\ x_0 = \dfrac{23}{3}, y = \dfrac{23}{3}, z_0 = -\dfrac{14}{3}\end{array}\right. \Rightarrow M(1;\,1;\,2)$ hoặc $M\left(\dfrac{23}{3};\dfrac{23}{3};-\dfrac{14}{3}\right)$.

HT 147. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình chóp tam giác đều S.ABC, biết $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Tìm toạ độ đỉnh S biết thể tích khối chóp S.ABC bằng 36.

Giải

Phương trình $(ABC): x + y + z - 3 = 0$.

ΔABC có trọng tâm $G(1;1;1)$ và AB= BC= CA= $3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Do hình chóp S.ABC đều nên đường thẳng SG qua G và vuông góc với (ABC)

Phương trình $SG: \begin{cases}x = 1+t\\ y = 1+t\\ z = 1+t\end{cases}$. Giả sử $S(1+t;1+t;1+t)$

Ta có : $V_{S.ABC}$=36=$\dfrac{1}{3}SG.\,S_{ABC} \Leftrightarrow t = 8,\ t = -8$. Vậy: $S(9;9;9)$ hoặc $S(-7;-7;-7)$.

Dạng 5: Xác định điểm trong đa giác

HT 148. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3). Tìm toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

Giải

Lập phương trình mp(ABC); (P) qua A và (P) ⊥ BC; (Q) qua B và (Q) ⊥ AC

Giải hệ gồm ba phương trình ba mặt phẳng trên ta được trực tâm H$\left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right)$

HT 149. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;3;5)$, $B(-4;3;2)$, $C(0;2;1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

Ta có: $AB = BC = CA = 3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC cũng là trọng tâm của nó. Kết luận: $I\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$.

HT 150. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm A(–1; 0; 1), B(1; 2; –1), C(–1; 2; 3). Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;-2), \overrightarrow{AC} = (0;2;2)$. Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của AB, AC là: $x + y - z - 1 = 0, y + z - 3 = 0.$

VTPT của mp(ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;-4;4)$. Suy ra (ABC): $2x - y + z + 1 = 0$.

Giải hệ: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$. Suy ra tâm đường tròn là $I(0; 2; 1)$.

Bán kính là $R = IA = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}.$

HT 151. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

$H(x;y;z)$ là trực tâm của ΔABC ⇔ $BH \perp AC, CH \perp AB, H \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = \frac{2}{15}; y = \frac{29}{15}; z = -\frac{1}{3} \right. \Rightarrow H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$$

$I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = \frac{14}{15};\ y = \frac{61}{30};\ z = -\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right) \right.$$

HT 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1), B(1;2;-1), C(-1;2;3)$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

Giải

Phương trình $(ABC): 2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a;b;c)$.

$IA = IB = IC \Rightarrow a + b - c - 1 = 0, b + c - 3 = 0 \quad (1); \quad I \in (ABC) \Rightarrow 2a - b + c + 1 = 0 \ (2)$

Từ (1) (2) $\Rightarrow I(0;2;1)$. Bán kính mặt cầu là $R = d(I,(Oxz)) = 2$

$\Rightarrow$ (S): $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$

HT 153. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A(3; 2; 3) và hai đường thẳng có phương trình $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Chứng minh đường thẳng d_1, d_2 và điểm A cùng nằm trong một mặt phẳng. Xác định toạ độ các đỉnh B và C của tam giác ABC biết d_1 chứa đường cao BH và d_2 chứa đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

Giải

d_1 qua $M_1(2;3;3)$, có VTCP $\vec{a} = (1;1;-2)$; d_2 qua $M_2(1;4;3)$ có VTCP $\vec{b} = (1;-2;1)$

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \neq \vec{0}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Rightarrow d_1, d_2$ cắt nhau.

Phương trình mặt phẳng chứa d_1, d_2: $x + y + z - 8 = 0$ $A \in mp(d_1, d_2)$.

Giả sử $B(2+t;3+t;3-2t) \in d_1 \Rightarrow$ trung điểm của AB là $M\left(\frac{t+5}{2};\frac{t+5}{2};3-t\right)$

$M \in d_2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(2;2;4) \Rightarrow B(1;2;5)$.

Giả sử $C(1+t;4-2t;3+t) \in d_2$. $\overrightarrow{AC} \perp \vec{a} \Rightarrow$ t = 0 $\Rightarrow$ C(1;4;2)

HT 154. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho cho tam giác ABC có A(3;2;3), đường cao CH, đường phân giác trong BM của góc B lần lượt có phương trình là $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác của tam giác ABC.

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $d_1 \Rightarrow$ (P): $x + y - 2z + 1 = 0$. B là giao điểm của d_2 với (P) $\Rightarrow B(1;4;3)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $d_2 \Rightarrow$ (Q): $x - 2y + z - 2 = 0$.

Gọi K là giao điểm của d_2 với (Q) $\Rightarrow$ $K(2;2;4)$. Gọi E là điểm đối xứng của A qua K $\Rightarrow$ $E(1;2;5)$.

Phương trình đường thẳng BE là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. C là giao điểm của BE và CH $\Rightarrow$ $C(1;2;5)$.

Ta có AB = AC = BC = $2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ Tam giác ABC đều.

HT 155. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình thang cân ABCD với $A\left(3;-1;-2\right)$, $B\left(1;5;1\right)$, $C\left(2;3;3\right)$, trong đó AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Tìm toạ độ điểm D.

Giải

Do ABCD là hình thang cân nên AD = BC = 3.

Gọi Δ là đường thẳng qua C và song song với AB, (S) là mặt cầu tâm A bán kính R = 3.

Điểm D cần tìm là giao điểm của Δ và (S).

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = \left(-2;6;3\right)$ nên có phương trình: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$

Toạ độ điểm D thoả Hệ PT:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 6t \\ z = 3 + 3t \\ \left(x-3\right)^2 + \left(y+1\right)^2 + \left(z+2\right)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 49t^2 + 82t + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{33}{49} \end{array}\right.$$

- Với t = – 1, thì D(4; – 3; 0) : không thoả vì AB = CD = 7
- Với $t = -\dfrac{33}{49} \Rightarrow D\left(\dfrac{164}{49}; -\dfrac{51}{49}; \dfrac{48}{49}\right)$ (nhận)

HT 156. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình thoi ABCD với $A(-1;2;1)$, $B(2;3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C, D và viết phương trình mặt phẳng chứa hình thoi đó biết rằng tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ và điểm D có hoành độ âm.

Giải

Gọi $I(-1-t;-t;2+t) \in d$. Ta có $\overrightarrow{IA} = (t;2+t;-1-t)$, $\overrightarrow{IB} = (3+t;3+t;-t)$.

Do ABCD là hình thoi nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow 3t^2+9t+6=0 \Leftrightarrow t=-1,\ t=-2$.

Vì C đối xứng với A qua I và D đối xứng với B qua I nên:

+ Với $t=-1 \Rightarrow I(0;1;1) \Rightarrow C(1;0;1),\ D(-2;-1;0)$.

+ Với $t=-2 \Rightarrow I(1;2;0) \Rightarrow C(3;2;-1),\ D(0;1;-2)$

Do D có hoành độ âm nên ta chọn được nghiệm $C(1;0;1),\ D(-2;-1;0)$

+ Gọi (P) là mặt phẳng chứa hình thoi ABCD, giả sử (P) có VTPT $\vec{n}$

Ta có $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{IA}=(-1;1;0)\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{IB}=(2;2;1)\end{cases}$ $\Rightarrow$ có thể chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right]=(1;1;-4)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): x+y-4z+3=0$..

HT 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $A(1;0;0)$, $C(-1;2;0)$, $D(-1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn SB và CD. Chứng minh rằng hai đường thẳng AM và BN vuông góc với nhau và xác định tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ONB.

Giải

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ B(1; 2; 0). M là trung điểm SB, N là trung điểm CD

$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, N(–1; 1; 0) $\Rightarrow$ AM $\perp$ BN. Vì ΔONB nằm trong mp(Oxy) nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔONB thuộc mp(Oxy).

Gọi $I(x;y;0)$. Ta có: $\begin{cases}IO=IN\\ IO=IB\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};0\right)$.

HT 158. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình vuông $MNPQ$ có $M(5;3;-1)$, $P(2;3;-4)$. Tìm toạ độ đỉnh Q biết rằng đỉnh N nằm trong mặt phẳng $(R): x+y-z-6=0$.

Giải

Gọi I là tâm hình vuông $\Rightarrow I\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$. Gọi $N(a;b;c)\in(R)$. $\overrightarrow{MP}=(-3;0;-3)$.

$\overrightarrow{IN}=\left(a-\frac{7}{2};b-3;c+\frac{5}{2}\right)$; $MP=3\sqrt{2} \Rightarrow IN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}N\in(R)\\ \overrightarrow{IN}\perp\overrightarrow{MP}\\ IN=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b-c-6=0\\ -3\left(a-\frac{7}{2}\right)-3\left(c+\frac{5}{2}\right)=0\\ \left(a-\frac{7}{2}\right)^2+(b-3)^2+\left(c+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,b=3,c=-1\\ a=3,b=1,c=-2\end{array}\right.$

• Nếu $N(2;3-1)$ thì $Q(5;3;-4)$. • Nếu $N(3;1;-2)$ thì $Q(4;5;-3)$.

HT 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông ABCD, biết $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$ và đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm tọa độ điểm C.

Giải

Ta có trung điểm BD là I(–1;–2; 4), BD = 12 và điểm A thuộc mp(Oxy) nên A(a; b; 0).

ABCD là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 + 8^2 = (a+5)^2 + (b+4)^2 \\ (a+1)^2 + (b+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4-2a \\ (a+1)^2 + (6-2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = \frac{-14}{5} \end{cases}$ ⇒ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$

• Với A(1; 2; 0) ⇒ C(–3;–6; 8) • Với $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right) \Rightarrow C\left(\frac{-27}{5};\frac{-6}{5};8\right)$.

HT 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông ABCD, biết $A(1;2;0), C(2;3;-4)$. và đỉnh B nằm trên mặt phẳng (Q): $x+2y+z-3=0$. Tìm toạ độ của đỉnh D, biết toạ độ của B là những số nguyên.

Giải

$AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3$. Gọi $B(x;y;z)$.

Ta có: $\begin{cases} B \in (Q) \\ AB = CB \\ AB = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z = 3 \quad (1) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x+4)^2 \ (2) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \ (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -1;\ y = 1;\ z = 2 \Rightarrow B(-1;1;2)$. Vậy $D(4;4;-6)$.

PHẦN V TUYỂN TẬP ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM

HT 161. **2013 A (CB)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ và điểm $A(1;7;3)$. Viết phương trình mặt phẳng *(P)* đi qua *A* và vuông góc với Δ. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Giải

Δ có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3;-2;1)$

(P) qua A và nhận $\vec{u}$ làm vec-tơ pháp tuyến nên (P) có phương trình:

$-3(x-1) - 2(y-7) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - z - 14 = 0$

$M \in \Delta$ nên $M(6-3t;-1-2t;-2+t)$

$AM = 2\sqrt{30} \Leftrightarrow (6-3t-1)^2 + (-1-2t-7)^2 + (-2+t-3)^2 = 120 \Leftrightarrow 7t^2 - 4t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\dfrac{3}{7}$ Suy ra: $M(3;-3;-1)$ hoặc $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right)$

Đ/s: $M(3;-3;-1); M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right)$

HT 162. **2013 A (NC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh *(P)* tiếp xúc với *(S)*. Tìm tọa độ tiếp điểm của *(P)* và *(S)*.

Giải

(S) có tâm $I(1;-2;1)$ có bán kính $R = \sqrt{14}$

$d_{(I,(P))} = \dfrac{|2.1 + 3.(-2) + 1.1 - 11|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \sqrt{14} = R$ Do đó, (P) tiếp xúc với (S)

Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S). Suy ra M thuộc đường thẳng qua I và vuông góc với (P).

Do đó: $M(1+2t;-2+3t;1+t)$

Do $M \in (P)$ nên $2(1+2t) + 3(-2+3t) + (1+t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3;1;2)$

Đ/s: $M(3;1;2)$

HT 163. **2013 B (CB)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua *A* và vuông góc với *(P)*. Tìm tọa độ điểm đối xứng của *A* qua *(P)*.

Giải

(P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;3;-1)$

Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}$ làm vec-tơ chỉ phương nên có phương trình:

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{-1}$

Gọi B là điểm đối xứng của A qua (P), suy ra $B \in \Delta$.

Do đó $B(3+2t;5+3t;-t)$

Trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc (P) nên: $2(3+t) + 3\left(\dfrac{10+3t}{2}\right) - \left(\dfrac{-t}{2}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow B(-1;-1;2)$

Đ/s: $B(-1;-1;2)$

HT 164. 2013 B (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1), B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua *A*, vuông góc với hai đường thẳng *AB* và Δ

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;3;2)$ vec-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-2;1;3)$

Đường thẳng vuông góc với AB và Δ có vec-tơ chỉ phương là: $\vec{v} = (7;2;4)$

Đường thẳng đi qua A, vuông góc với AB và Δ có phương trình:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

Đ/s: $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$

HT 165. 2013 D (CB) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-1;-2), B(0;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0.$ Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc *A* trên *(P)*. Viết phương trình mặt phẳng đi qua *A, B* và vuông góc với *(P)*.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Suy ra $H(-1+t;-1+t;-2+t)$

$H \in (P) \Leftrightarrow (-1+t)+(-1+t)+(-2+t)-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$. Do đó, $H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần viết.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$ và vec-tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = (1;1;1)$

Do đó, (Q) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}' = (-1;2;-1)$

Phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y+z+1=0$

Đ/s: $(Q): x-2y+z+1=0$

HT 166. 2013 D (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0.$ Tính khoảng cách từ *A* đến *(P)*. Viết phương trình mặt phẳng đi qua *A* và song song với *(P)*.

Giải

$$d(A,(P)) = \frac{\left|(-1)-2.3-2(-2)+5\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

Vec-tơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1;-2;-2)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm: $(Q): x-2y-2z+3=0$

Đ/s: $(Q): x-2y-2z+3=0$

HT 167. 2012 A (CB) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu *(S)* có tâm *I* và cắt *d* tại hai điểm *A, B* sao cho tam giác *IAB* vuông tại *I*.

Giải

Vec-tơ chỉ phương của d là: $\vec{u}_d = (1;2;1)$.

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $IH \perp AB$

Ta có $H \in d$ nên tọa độ H có dạng $H(t-1;2t;t+2) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (t-1;2t;t-1)$

Tam giác IAH vuông cân tại H.

Suy ra bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{2}IH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Do đó, phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2+y^2+(z-3)^2 = \frac{8}{3}$

Đ/s: $x^2+y^2+(z-3)^2 = \frac{8}{3}$

HT 168. **2012 A (NC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng $\triangle$ cắt *d* và *(P)* lần lượt tại *M, N* sao cho *A* là trung điểm của đoạn *MN.*

Giải

$M\in d$, suy ra tọa độ M có dạng $M(2t-1;t;t+2)$

MN nhận A là trung điểm, suy ra $N(3-2t;-2-t;2-t)$

$N\in(P)\Leftrightarrow 3-2t-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$

Đường thẳng Δ đi qua A và M có phương trình: $\triangle$: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$

Đ/s: $\triangle$: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$

HT 169. **2012 B (CB)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0), B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua *A, B* và có tâm thuộc đường thẳng *d.*

Giải

Gọi (S) là mặt cầu cần viết và I là tâm của (S)

Do $I\in d$ nên tọa độ của điểm I có dạng: $I(1+2t;t;-2t)$

Do $AB\in(S)$ nên $AI=BI$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2+(t-1)^2+4t^2=(2t+3)^2+(t-3)^2+(2t+2)^2\Leftrightarrow t=-1$

Do đó, $I(-1;-1;2)$ và bán kính mặt cầu: $R=\sqrt{17}$

Vậy, phương trình mặt cầu cần tìm: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$

Đ/s: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$

HT 170. **2012 B (NC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;3), M(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng *(P)* qua *A* và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại *B, C* sao cho tam giác *ABC* có trọng tâm thuộc đường thẳng *AM.*

Giải

Do $B\in Ox, C\in Oy$ nên tọa độ của B và C có dạng: $B(b;0;0), C(0;c;0)$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra: $G\left(\dfrac{b}{3};\dfrac{c}{3};1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(1;2;-3)$ nên đường thẳng $AM:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$

Do G thuộc đường thẳng AM nên $\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{6}=\dfrac{-2}{-3}$ Suy ra $b=2; c=4$

Do đó, phương trình của mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=1$

Nghĩa là $(P): 6x+3y+4z-12=0$

Đ/s: $(P): 6x+3y+4z-12=0$

HT 171. **2012 D (CB)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+10=0$ và điểm $I(2;1;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm *I* và cắt *(P)* theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Suy ra H là tâm đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cần viết phương trình.

Ta có: $IH=d(I;(P))=3$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$

Đ/s: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$

HT 172. **2012 D (NC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2), B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ điểm *M* thuộc *d* sao cho tam giác *AMB* vuông tại *M.*

Giải

Do $M \in d$ nên tọa độ điểm $M(1+2t;-1-t;t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (2t;-t;t-2), \overrightarrow{BM} = (-1+2t;-t;t)$

Tam giác AMB vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow 2t(-1+2t) + t^2 + t(t-2) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \dfrac{2}{3}$; Do đó: $M(1;-1;0), M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Đ/s: $M(1;-1;0), M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

HT 173. 2011 A (CB): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm *A(2; 0; 1), B(0; –2; 3)* và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc *(P)* sao cho *MA = MB = 3.*

Giải

Gọi $M(a;b;c)$. Ta có: $M \in (P)$ và $MA = MB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c + 4 = 0 \\ (a-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ a^2 + (b+2)^2 + (c-3)^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c + 4 = 0 \\ a + b - c + 2 = 0 \\ (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 2 \\ c = 3b \\ 7b^2 - 11b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c) = (0;1;3)$ hoặc $\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$

Suy ra: $M(0;1;3)$ **hoặc** $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$

Đ/s: $M(0;1;3)$ **hoặc** $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$

HT 174. 2011 A (NC): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng *(OAB)*, biết điểm *B* thuộc *(S)* và tam giác *OAB* đều.

Giải

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$

Nhận xét: O và A cùng thuộc (S)

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \dfrac{OA}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Khoảng cách: $d(I,(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(P) đi qua O có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0\ (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\ (*))$

(P) đi qua A, suy ra $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$

$d(I,(P)) = \dfrac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow c = \pm a$

Theo (*), suy ra $(P): x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$

Đ/s: $(P): x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$

HT 175. 2011 B (CB) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x + y + z – 3 = 0. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

Giải

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1} \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;1;1)$

Gọi $M(a;b;c)$ ta có: $M \in (P), MI \perp \Delta$ và $MI = 4\sqrt{14} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a-2b-c+2=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=-3a+4 \\ (a-1)^2+(2a-2)^2+(-3a+3)^2=224 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c)=(5;9;-11)$ hoặc $(a;b;c)=(-3;-7;13)$

Đ/s: $M(5;9;-11)$ **hoặc** $M(-3;-7;13)$

HT 176. 2011 B (NC) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm A(– 2; 1; 1), B(– 3; – 1; 2). Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Giải

$M \in \Delta$, suy ra tọa độ M có dạng: $M(-2+t;1+3t;-5-2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t;3t;-6-2t)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = (-t-12;t+6;t)$

$S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (t+12)^2+(t+6)^2+t^2=180$

$\Leftrightarrow t^2+12t=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=-12.$

Vậy, $M(-2;1;-5); M(-14;-35;19)$

Đ/s: $M(-2;1;-5); M(-14;-35;19)$

HT 177. 2011 D (CB) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm *A(1; 2; 3)* và đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng *Δ* đi qua điểm *A*, vuông góc với đường thẳng *d* và cắt trục *Ox.*

Giải

Mặt phẳng (P) đi qua A, vuông góc với d, có phương trình: $(P): 2x+y-2z+2=0$

Gọi B là giao điểm của trục Ox với (P), suy ra Δ là đường thẳng đi qua các điểm A, B

$B \in Ox$, có tọa độ $B(b;0;0)$ thỏa mãn phương trình: $2b+2=0 \Rightarrow B(-1;0;0)$

Phương trình $\Delta : \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$

Đ/s: Δ: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$

HT 178. 2011 D (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Giải

Gọi I là tâm mặt cầu. $I \in \Delta$ suy ra tọa độ I có dạng : $I(1+2t;3+4t;t)$

Mặt cầu tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi $d(I,(P))=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2(1+2t)-(3+4t)+2t|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Suy ra, $I(5;11;2), I(-1;-1;-1)$

Phương trình mặt cầu: $(x-5)^2+(y-11)^2+(z-2)^2=1; (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$

Đ/s: $(x-5)^2+(y-11)^2+(z-2)^2=1; (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$

HT 179. 2010 A (CB) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 0$. Gọi *C* là giao điểm của Δ với *(P)*, *M* là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ *M* đến *(P)*, biết rằng $MC = \sqrt{6}$.

Giải

Đường thẳng Δ có vec-tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2;1)$

Gọi H là hình chiếu của M trên (P), ta có: $\widehat{HMC} = \left|\cos(\vec{v}, \vec{n})\right|$

$$d(M,(P)) = MH = MC.\cos\widehat{HMC} = MC.\left|\cos\left(\vec{v}, \vec{n}\right)\right| = \sqrt{6}.\frac{\left|2-2-1\right|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Đ/s: $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$

HT 180. 2010 A (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm *A*(0; 0; −2) và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ *A* đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm *A*, cắt Δ tại hai điểm *B* và *C* sao cho *BC* = 8.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2;2;-3)$, nhận $\vec{v} = (2;3;2)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (2;-2;1), \left[\vec{v}, \overrightarrow{MA}\right] = (7;2;-10)$

Suy ra: $d(A,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{v}, \overrightarrow{MA}\right]\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = 3$

Gọi (S) là mặt cầu tâm A, cắt Δ tại B và C sao cho $BC = 8$. Suy ra, bán kính của (S) là $R = 5$

Phương trình của (S) : $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

Đ/s: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

HT 181. 2010 B (CB) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó *b,c* dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định *b* và *c*, biết rằng mặt phẳng *(ABC)* vuông góc với mặt phẳng *(P)* và khoảng cách từ điểm *O* đến mặt phẳng *(ABC)* bằng $\frac{1}{3}$.

Giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Suy ra: $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \ (1)$

Ta có: $d(O,(ABC)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 8 \ (2)$

Từ (1), (2), do $b, c > 0$ suy ra $b = c = \frac{1}{2}$

Đ/s: $b = c = \frac{1}{2}$

HT 182. 2010 B (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;1;2)$

Do M thuộc trục hoành, nên M có tọa độ $M(t;0;0)$ suy ra: $\overrightarrow{AM} = (t;-1;0)$

$\Rightarrow \left[\vec{v}, \overrightarrow{AM}\right] = (2;2t;-t-2)$

$$\Rightarrow d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{v}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{5t^2+4t+8}}{3}$$

Ta có: $d(M,\Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5t^2+4t+8}}{3} = \left|t\right|$

$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$

Suy ra, $M(-1;0;0)$ **hoặc** $M(2;0;0)$

Đ/s: $M(-1;0;0)$ **hoặc** $M(2;0;0)$

HT 183. 2010 D (Chuẩn) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Giải

Ta có: vec-tơ pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_P = (1;1;1), \vec{n}_Q = (1;-1;1)$

Suy ra: $\left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = (2;0;-2)$ là vec-tơ pháp tuyến của (R)

Mặt phẳng (R) có phương trình dạng: $(R): x - z + D = 0$

Ta có: $d(O,(R)) = \frac{\left|D\right|}{\sqrt{2}}$ suy ra: $\frac{\left|D\right|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = 2\sqrt{2}$ hoặc $D = -2\sqrt{2}$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(R): x - z + 2\sqrt{2} = 0$ **hoặc** $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

Đ/s: $(R): x - z + 2\sqrt{2} = 0$ **hoặc** $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

HT 184. 2010 D (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và Δ_2:

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Giải

Ta có $M \in \Delta_1$, nên $M(3+t;t;t)$

Δ_2 đi qua $A(2;1;0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;1;2)$

Do đó: $\overrightarrow{AM} = (t+1;t-1;t); \left[\vec{v}, \overrightarrow{AM}\right] = (2-t;2;t-3)$

Ta có: $d(M,\Delta_2) = \frac{\left|\left[\vec{v}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{2t^2-10t+17}}{3}$ Suy ra: $\frac{\sqrt{2t^2-10t+17}}{3} = 1$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$

Khi đó, $M(4;1;1)$ **hoặc** $M(7;4;4)$

Đ/s: $M(4;1;1)$ **hoặc** $M(7;4;4)$

HT 185. 2009 A (Chuẩn) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đờng tròn đó.

Giải

(S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 5$

Khoảng cách từ I đến (P): $d(I,(P)) = \frac{\left|2-4-3-4\right|}{3} = 3 < R$ suy ra đpcm

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến

H là hình chiếu vuông góc của I trên (P): $IH = d(I,(P)) = 3, r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$

Tọa độ $H(a;b;c)$ thỏa mãn: $\begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = 2 - 2t \\ c = 3 - t \\ 2a - 2b - c - 4 = 0 \end{cases}$ Giải hệ ta được: $H(3;0;2)$

Đ/s: $H(3;0;2)$

HT 186. 2009 A (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}; \Delta_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm *M* thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ *M* đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng *(P)* bằng nhau.

Giải

Δ_2 qua $A(1;3;-1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-2)$

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1+t;t;-9+6t)$

$\overrightarrow{MA} = (2-t;3-t;8-6t), \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right] = (8t - 14; 20 - 14t; t - 4)$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right]\right| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến $\Delta_2 : d(M, \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến (P): $d(M,(P)) = \frac{\left|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\left|11t - 20\right|}{3}$

$\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{\left|11t - 20\right|}{3} \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{53}{35}$

Suy ra, $M(0;1;-3); M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$

Đ/s: $M(0;1;-3); M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$

HT 187. 2009 B (Chuẩn) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện *ABCD* có các đỉnh $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng *(P)* đi qua *A, B* sao cho khoảng cách từ *C* đến *(P)* bằng khoảng cách từ *D* đến *(P).*

Giải

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:
Trường hợp 1: (P) qua A, B và song song với CD
Vec-tơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right]$

$\overrightarrow{AB} = (-3;-1;12), \overrightarrow{CD} = (-2;4;0) \Rightarrow \vec{n} = (-8;-4;-14)$

Phương trình mặt phẳng $(P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$

Trường hợp 2: (P) qua A, B và cắt CD. Suy ra, (P) cắt CD tại trung điểm I của CD

$I(1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0;-1;0)$ vec-tơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right] = (2;0;3)$

Phương trình của $(P): 2x + 3z - 5 = 0$

Đ/s: $(P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$ **hoặc** $(P): 2x + 3z - 5 = 0$

HT 188. 2009 B (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): x – 2y + 2z – 5 = 0 và hai điểm A(-3;0;1), B(1;-1;3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P)
Phương trình $(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$

K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q). Ta có $BK > BH$ nên AH là đường thẳng cần tìm

Tọa độ $H(a;b;c)$ thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{a-1}{1} = \dfrac{b+1}{-2} = \dfrac{c-3}{2} \\ a - 2b + 2c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$

$\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$. Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$

Đ/s: $\Delta : \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$

HT 189. 2009 D (Chuẩn) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A (2; 1; 0), B(1;2;2), C(1;1;0) và mặt phẳng (P): x + y + z – 20 = 0. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Giải

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$ Phương trình $AB : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

D thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow D(2-t;1+t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1-t;t;2t)$

Vec-tơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1;1;1)$

C không thuộc mặt phẳng (P)

$CD//(P) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 1(1-t) + 1.t + 1.2t = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$. Vậy $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$

Đ/s: $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$

HT 190. 2009 D (NC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x + 2y – 3z + 4 = 0. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ

Giải

Tọa độ giao điểm I của Δ với (P) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;1;1)$

Vec-tơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1;2;-3)$ vec-tơ chỉ phương của $\Delta : \vec{u} = (1;1;-1)$

Đường thẳng d cần tìm qua I và có vec-tơ chỉ phương $\vec{v} = \left[\vec{n},\vec{u}\right] = (1;-2;-1)$

Phương trình đường thẳng $d : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$

Đ/s: $d : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$

Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô và các bạn học sinh đã đọc tài liệu này!

Mọi sự góp ý xin gửi về: huythuong2801@gmail.com

Toàn bộ tài liệu ôn thi môn toán của Lưu Huy Thưởng ở địa chỉ sau:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com