



CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC 2013 - 2014

SỐ PHỨC

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỜNG



HỌ VÀ TÊN:

LỚP :

TRƯỜNG :

HÀ NỘI, 8/2013

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC



BÀI 1: SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

- Tập hợp số phức: \mathbb{C}
- Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$

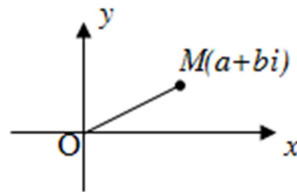
$(a, b \in \mathbb{R}, a \text{ là phần thực, } b \text{ là phần ảo, } i \text{ là đơn vị ảo, } i^2 = -1)$

- z là số thực \Leftrightarrow phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$)
- z là thuần ảo \Leftrightarrow phần thực của z bằng 0 ($a = 0$)

Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$

2. Biểu diễn hình học: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mp(Oxy) (mp phức)



3. Cộng và trừ số phức:

- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$ • $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$
- Số đối của $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$
- \vec{u} biểu diễn z , \vec{u}' biểu diễn z' thì $\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn $z + z'$ và $\vec{u} - \vec{u}'$ biểu diễn $z - z'$.

4. Nhân hai số phức :

- $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$
- $k(a + bi) = ka + kbi$ ($k \in \mathbb{R}$)

5. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$; $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$; $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$; $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

6. Môđun của số phức : $z = a + bi$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

7. Chia hai số phức:

- $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \quad (z \neq 0)$
- $\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$
- $\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz$

8. Căn bậc hai của số phức:

- $z = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi \Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$
- $w = 0$ có đúng 1 căn bậc hai là $z = 0$
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai đối nhau
- Hai căn bậc hai của $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$
- Hai căn bậc hai của $a < 0$ là $\pm\sqrt{-a} \cdot i$

9. Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (*) (A, B, C là các số phức cho trước, $A \neq 0$).

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta \neq 0$: (*) có hai nghiệm phân biệt, (δ là 1 căn bậc hai của Δ)
- $\Delta = 0$: (*) có 1 nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

Chú ý: Nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của (*) thì \bar{z}_0 cũng là một nghiệm của (*).

10. Dạng lượng giác của số phức:

- $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (r > 0)$ là dạng lượng giác của $z = a + bi \quad (z \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

- φ là một argumen của $z, \varphi = (Ox, OM)$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$

11. Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$:

$$\bullet z.z' = rr'.[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')] \quad \bullet \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')]$$

12. Công thức Moa-vơ:

$$\bullet [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\bullet (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

13. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác:

• Số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($r > 0$) có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\text{và } -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right]$$

• **Mở rộng:** Số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($r > 0$) có n căn bậc n là:

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

VẤN ĐỀ 1: Thực hiện các phép toán cộng - trừ - nhân - chia

HT 1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

1) $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$	2) $2 - i + \left(\frac{1}{3} - 2i \right)$	3) $(2 - 3i) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i \right)$
4) $\left(3 - \frac{1}{3}i \right) + \left(-\frac{3}{2} + 2i \right) - \frac{1}{2}i$	5) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}i \right) - \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{5}i \right)$	6) $(2 - 3i)(3 + i)$
7) $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} - \frac{\sqrt{2} - i}{i}$	8) $\frac{3}{1 + 2i}$	9) $\frac{1 + i}{1 - i}$
10) $\frac{m}{i\sqrt{m}}$	11) $\frac{a + i\sqrt{a}}{a - i\sqrt{a}}$	12) $\frac{3 + i}{(1 - 2i)(1 + i)}$
14) $\frac{1 + i}{2 - i}$	15) $\frac{a + i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$	16) $\frac{2 - 3i}{4 + 5i}$

HT 2: Thực hiện các phép toán sau:

1) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$	2) $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$	3) $(3 + 4i)^2$
4) $\left(\frac{1}{2} - 3i \right)^3$	5) $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^2}{(3 + 2i)^2 - (2 + i)^2}$	6) $(2 - i)^6$
7) $(-1 + i)^3 - (2i)^3$	8) $(1 - i)^{100}$	9) $(3 + 3i)^5$

HT 3: Cho số phức $z = x + yi$. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

1) $z^2 - 2z + 4i$ 2) $\frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$

HT 4: Phân tích thành nhân tử, với $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1) $a^2 + 1$ 2) $2a^2 + 3$ 3) $4a^4 + 9b^2$ 4) $3a^2 + 5b^2$
 5) $a^4 + 16$ 6) $a^3 - 27$ 7) $a^3 + 8$ 8) $a^4 + a^2 + 1$

HT 5: Tìm căn bậc hai của số phức:

1) $-1 + 4\sqrt{3}i$ 2) $4 + 6\sqrt{5}i$ 3) $-1 - 2\sqrt{6}i$ 4) $-5 + 12i$
 5) $-\frac{4}{3} - \frac{5}{2}i$ 6) $7 - 24i$ 7) $-40 + 42i$ 8) $11 + 4\sqrt{3}i$
 9) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 10) $-5 + 12i$ 11) $8 + 6i$ 12) $33 - 56i$

VẤN ĐỀ 2: Giải phương trình trên tập số phức

HT 6: Giải các phương trình sau (ẩn z):

1) $z^2 + |z| = 0$ 2) $z^2 + |z|^2 = 0$
 3) $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$ 4) $z^2 - \bar{z} = 0$
 5) $|z| - 2z = -1 - 8i$ 6) $(4 - 5i)z = 2 + i$
 7) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ 8) $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$
 9) $2|z| - 3z = 1 - 12i$ 10) $(3 - 2i)^2(z + i) = 3i$
 11) $[(2 - i)\bar{z} + 3 + i]\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$ 12) $z\left(3 - \frac{1}{2}i\right) = 3 + \frac{1}{2}i$
 13) $\frac{3 + 5i}{z} = 2 - 4i$ 14) $(z + 3i)(z^2 - 2z + 5) = 0$
 15) $(z^2 + 9)(z^2 - z + 1) = 0$ 16) $2z^3 - 3z^2 + 5z + 3i - 3 = 0$

HT 7: Giải các phương trình sau (ẩn x):

1) $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ 2) $3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$
 3) $x^2 - (3 - i)x + 4 - 3i = 0$ 4) $3ix^2 - 2x - 4 + i = 0$
 5) $3x^2 - x + 2 = 0$ 6) $ix^2 + 2ix - 4 = 0$
 7) $3x^3 - 24 = 0$ 8) $2x^4 + 16 = 0$

VẤN ĐỀ 3: Tập hợp điểm**HT 8:** Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

- 1) $|z + \bar{z} + 3| = 4$ 2) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$ 3) $|z - \bar{z} + 2i| = 2|z - i|$
- 4) $|2iz - 1| = 2|z + 3|$ 5) $|2i - 2z| = |2z - 1|$ 6) $|z + 3| = 1$
- 7) $|z + i| = |z - 2 - 3i|$ 8) $\left| \frac{z - 3i}{z + i} \right| = 1$ 9) $|z - 1 + i| = 2$
- 10) $|2 + z| = |i - z|$ 11) $|z + 1| < 1$ 12) $1 < |z - i| < 2$

HT 9: Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

- 1) $z + 2i$ là số thực 2) $z - 2 + i$ là số thuần ảo 3) $z.\bar{z} = 9$

VẤN ĐỀ 4: Dạng lượng giác của số phức**HT 10:** Tìm một argumen của mỗi số phức sau:

- 1) $2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ 2) $4 - 4i$ 3) $1 - \sqrt{3}.i$
- 4) $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$ 5) $-\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$ 6) $(1 - i.\sqrt{3})(1 + i)$

HT 11: Thực hiện các phép tính sau:

- 1) $3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$ 2) $5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
- 3) $3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ 4) $5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
- 5) $\sqrt{2}(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$ 6) $\frac{\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$
- 7) $\frac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}$ 8) $\frac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}$
- 9) $\frac{\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})}{2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})}$ 10) $\frac{\sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)}{2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}$

HT 12: Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:

- 1) $1 - i\sqrt{3}$ 2) $1 + i$ 3) $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$ 4) $2.i(\sqrt{3} - i)$
- 5) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ 6) $\frac{1}{2 + 2i}$ 7) $\sin \phi + i \cos \phi$ 8) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- 9) $1 + i\sqrt{3}$ 10) $\sqrt{3} - i$ 11) $3 + 0i$ 12) $\tan \frac{5\pi}{8} + i$

HT 13: Viết dưới dạng đại số các số phức sau:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$ | 2) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ | 3) $3 \left(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ \right)$ |
| 4) $(2 + i)^6$ | 5) $\frac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)}$ | 6) $\frac{1}{i}$ |
| 7) $\frac{1 + i}{2i + 1}$ | 8) $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ | 9) $(2 - 2i)^7 \cdot \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{40}$ |
| 10) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ | 11) $\left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{100} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ | 12) $\frac{1}{(\sqrt{3} - i)^{17}}$ |

HT 14: Tính:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^5$ | 2) $(1 + i)^{16}$ | 3) $(\sqrt{3} - i)^6$ |
| 4) $\left[\sqrt{2} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \right]^7$ | 5) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^5$ | 6) $(1 + i)^{2008} + (1 - i)^{2008}$ |
| 7) $\left(\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}} \right)^{21}$ | 8) $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{12}$ | 9) $\left(\frac{i + 1}{i} \right)^{2008}$ |

BÀI 2: ÔN TẬP

HT 15: Thực hiện các phép tính sau:

- | | |
|---|---|
| 1) $(2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$ | 2) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^6 + \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \right)^6$ |
| 3) $\left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{16} + \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^8$ | 4) $\frac{3 + 7i}{2 + 3i} + \frac{5 - 8i}{2 - 3i}$ |
| 5) $(2 - 4i)(5 + 2i) + (3 + 4i)(-6 - i)$ | 6) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2009}$ |
| 7) $i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47}$ | 8) $1 + i + i^2 + \dots + i^n, (n \geq 1)$ |
| 9) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{2000}$ | 10) $i^{-5}(-i)^{-7} + (-i)^{13} + i^{-100} + (-i)^{94}$ |

HT 16: Cho các số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -2 + 3i, z_3 = 1 - i$. Tính:

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| 1) $z_1 + z_2 + z_3$ | 2) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ | 3) $z_1 z_2 z_3$ |
| 4) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ | 5) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$ | 6) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$ |

HT 17: Rút gọn các biểu thức sau:

- 1) $A = z^4 + iz^3 - (1 + 2i)z^2 + 3z + 1 + 3i, \text{ với } z = 2 + 3i$

$$2) B = (z - z^2 + 2z^3)(2 - z + z^2), \text{ v\o\i } z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

HT 18: Tìm các số thực x, y sao cho:

$$1) (1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i \qquad 2) \frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$$

$$3) (4 - 3i)x^2 + (3 + 2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$$

$$4) 2x + 3 + (3y - 1)i = (5x - 6) - (y + 2)i$$

$$5) \frac{x(3-2i)}{2+3i} + y(1-2i)^3 = 11 + 4i$$

$$6) x(3+2i) + y(1-2i)^3 = 9 + 14i$$

HT 19: Tìm các căn bậc hai của các số phức sau:

$$1) 8 + 6i \qquad 2) 3 + 4i \qquad 3) 1 + i \qquad 4) 7 - 24i$$

$$5) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \qquad 6) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^2 \qquad 7) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad 8) i, -i$$

$$9) \frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}} \qquad 10) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad 11) -2(1+i\sqrt{3}) \qquad 12) \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$$

HT 20: Giải các phương trình sau:

$$1) z^3 - 125 = 0 \qquad 2) z^4 + 16 = 0 \qquad 3) z^3 + 64i = 0$$

$$4) z^3 - 27i = 0 \qquad 5) z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0 \qquad 6) z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$$

HT 21: Gọi $u_1; u_2$ là hai căn bậc hai của $z_1 = 3 + 4i$ và $v_1; v_2$ là hai căn bậc hai của $z_2 = 3 - 4i$. Tính $u_1 + u_2 + v_1 + v_2$?

HT 22: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

$$1) z^2 + 5 = 0 \qquad 2) z^2 + 2z + 2 = 0 \qquad 3) z^2 + 4z + 10 = 0$$

$$4) z^2 - 5z + 9 = 0 \qquad 5) -2z^2 + 3z - 1 = 0 \qquad 6) 3z^2 - 2z + 3 = 0$$

$$7) (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 \qquad 8) z^2 + \bar{z} + 2 = 0 \qquad 9) z^2 = \bar{z} + 2$$

$$10) 2z + 3\bar{z} = 2 + 3i \qquad 11) (z + 2i)^2 + 2(z + 2i) - 3 = 0 \qquad 12) z^3 = \bar{z}$$

$$13) 4z^2 + 8|z|^2 = 8 \qquad 14) iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0 \qquad 15) (1 + i)z^2 + 2 + 11i = 0$$

HT 23: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

$$1) \left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2 - 5\frac{4z+i}{z-i} + 6 = 0 \qquad 2) (z+5i)(z-3)(z^2+z+3) = 0$$

$$3) (z^2 + 2z) - 6(z^2 + 2z) - 16 = 0 \qquad 4) z^3 - (1+i)z^2 + (3+i)z - 3i = 0$$

5) $(z + i)(z^2 - 2z + 2) = 0$

6) $z^2 - 2iz + 2i - 1 = 0$

7) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(12 + 5i) = 0$

8) $z^2 - 80z + 4099 - 100i = 0$

9) $(z + 3 - i)^2 - 6(z + 3 - i) + 13 = 0$

10) $z^2 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)z + i \cos \varphi \sin \varphi = 0$

HT 24: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1) $x^2 - (3 + 4i)x + 5i - 1 = 0$

2) $x^2 + (1 + i)x - 2 - i = 0$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$

4) $x^2 + x + 1 = 0$

5) $x^3 - 1 = 0$

HT 25: Giải các phương trình sau biết chúng có một nghiệm thuần ảo:

1) $z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0$

2) $z^3 + (i - 3)z^2 + (4 - 4i)z - 4 + 4i = 0$

HT 26: Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện:

1) $(z - 2)(\bar{z} + i)$ là số thực.

2) $z^2 = z$

3) $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$

4) $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-3i}{z+1} \right| = 1$

5) $z^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$

6) $|z - 1| = 5$ và $17(z + \bar{z}) - 5z\bar{z} = 0$

7) $|z| = 1$ và $\left| z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 \right| = 1$

8) $|z - 2 + i| = 2$. Biết phần ảo nhỏ hơn phần thực 3 đơn vị.

9) $|z| = 1$ và $\left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$

HT 27: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước:

1) $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo

2) $|z| = |z - 2 - 2i|$ và $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo

3) $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + 4i|$ và $\frac{z - 2i}{z + i}$ là số ảo.

4) $|z| = 5$ và $\frac{z + 7i}{z + 1}$ là số thực.

HT 28: Giải các phương trình trùng phương:

1) $z^4 - 8(1 - i)z^2 + 63 - 16i = 0$

2) $z^4 - 24(1 - i)z^2 + 308 - 144i = 0$

3) $z^4 + 6(1 + i)z^2 + 5 + 6i = 0$

HT 29: Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn hệ thức sau:

1) $\left| \frac{z}{z-i} \right| = 3$

2) $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$

3) $(z - 2)(\bar{z} + i)$ là số thực

4) $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$

5) $\frac{z+i}{z+i}$ là số thực

HT 30: Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn hệ thức sau:

1) $|z - 3 + 4i| = 2$

2) $|z - i| = |(1 + i)z|$

3) $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo

4) $|z| = \left| \frac{1}{z} \right|$

5) $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2$

HT 31: Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z' thoả mãn hệ thức sau:

1) $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết z thoả mãn: $|z - 1| = 2$

2) $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết rằng z thoả mãn: $|z + 1| \leq 3$

3) $z' = (1 + 2i)z + \sqrt{3}$ biết rằng z thoả mãn: $|z + \sqrt{3}|^2 = \frac{2zz}{5}$

4) $z' = (1 + i)z + 1$ biết $|z + 2| \leq 1$

HT 32: Hãy tính tổng $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$ biết rằng $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

HT 33: Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:

1) $i^4 + i^3 + i^2 + i + 1$

2) $(1 - i)(2 + i)$

3) $\frac{2 + i}{1 - i}$

4) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

5) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

6) $\cot \alpha + i, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

7) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha), 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

HT 34: Tìm môđun và một argumen của các số phức sau:

1) $\frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$

2) $\frac{(-1 + i)^4}{(\sqrt{3} - i)^{10}} + \frac{1}{(2\sqrt{3} + 2i)^4}$

3) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$

4) $-\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}$

5) $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$

6) $-2 + 2\sqrt{3}i$

7) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

8) $\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

9) $4 - 3i$

HT 35: Tìm môđun và một argumen của các số phức sau:

1) $\frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$

2) $\frac{(-1 + i)^4}{(\sqrt{3} - i)^{10}} + \frac{1}{(2\sqrt{3} + 2i)^4}$

3) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$

HT 36: Chứng minh các biểu thức sau có giá trị thực:

1) $(2 + i\sqrt{5})^7 + (2 - i\sqrt{5})^7$

2) $\left(\frac{19 + 7i}{9 - i} \right)^n + \left(\frac{20 + 5i}{7 + 6i} \right)^n$

3) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^6 + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^6$

4) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^5 + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^5$

5) $\left(\frac{i + \sqrt{3}}{2} \right)^6 + \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2} \right)^6$

HT 37: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện sau, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

1) $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực

2) $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$

$$3) |iz - 3| = |z - 2 - i|$$

HT 38: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện sau, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất.

$$1) |z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$$

$$2) |z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

$$3) \left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$$

$$4) |z + 1 - 2i| = 1$$

$$5) |z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$$

HT 39: Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức sau:

$$\frac{4i}{i-1}; (1-i)(1+2i); \frac{2+6i}{3-i}$$

1) Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

2) Tìm số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.

HT 40: Giải phương trình $z = \left(2 - \frac{z+1}{z-7}\right)^2$, Đ/s: $z = 3 \pm 4i; z = 9$

HT 41: Chứng minh rằng: nếu $|z| \leq 1$ thì $\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1$.

BÀI 3: TUYỂN TẬP SỐ PHỨC THI ĐẠI HỌC

HT 42: (ĐH Khối A - 2009) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2. \text{ Đ/s: } A = 20$$

HT 43: (ĐH Khối B - 2009) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$

$$\text{Đ/s: } z = 3 + 4i \text{ hoặc } z = 5$$

HT 44: (ĐH khối D - 2009) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3-4i)| = 2$. Đ/s: Đường tròn tâm I (3;-4), bán kính R = 2

HT 45: (CĐ khối A, B, D - 2009) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$. Xác định phần thực và phần ảo của z . Đ/s: Phần thực: 2; Phần ảo: -3

HT 46: (CĐ khối A, B, D - 2009) Giải phương trình: $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i$ trên tập số phức. Đ/s: $z_1 = 3+2i; z_2 = 2+i$

HT 47: (ĐH khối A - 2010) Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$ Đ/s: $a = 5, b = -\sqrt{2}$

HT 48: (ĐH khối A - 2010) Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của $\bar{z} + iz$. Đ/s: $8\sqrt{2}$

HT 49: (ĐH khối B - 2010) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |(1+i)z|$. Đ/s: đường tròn tâm I (0;-1) bán kính R = $\sqrt{2}$

HT 50: (ĐH khối D - 2010) Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

$$z_1 = 1+i; z_2 = 1-i; z_3 = -1-i; z_4 = -1+i$$

HT 51: (CĐ khối A, B, D - 2010) Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$. Xác định phần thực, phần ảo của số phức z . Đ/s: Phần thực: -2; phần ảo: 5

HT 52: (ĐH khối A - 2011) Tìm tất cả các số phức z , biết $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$. Đ/s: $z = 0; z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

HT 53: (ĐH khối A - 2011) Tính môđun của số phức z , biết: $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$

$$\text{Đ/s: } \frac{\sqrt{2}}{3}$$

HT 54: (ĐH khối B - 2011) Tìm số phức z biết: $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$ **Đ/s:** $z = -1 - i\sqrt{3}$ hoặc $z = 2 - i\sqrt{3}$

HT 55: (ĐH khối B - 2011) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^3$

Đ/s: phần thực là 2 phần ảo là 2

HT 56: (ĐH khối D - 2011) Tìm số phức z biết: $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$ **Đ/s:** $z = 2 - i$

HT 57: (ĐH khối A-A1 - 2012) Cho số phức z thỏa mãn: $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$. Tính mô-đun của số phức

$$w = 1 + z + z^2 \quad \text{Đ/s: } |w| = \sqrt{13}$$

HT 58: (ĐH khối B - 2012) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác

$$\text{của } z_1 \text{ và } z_2 \quad \text{Đ/s: } z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right); z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

HT 59: (ĐH khối D - 2012) Cho số phức z thỏa mãn: $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Tìm mô-đun của số phức

$$w = z + 1 + i \quad \text{Đ/s: } |w| = 5$$

HT 60: (ĐH khối D - 2012) Giải phương trình: $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$ trên tập số phức

$$\text{Đ/s: } z = -1 - 2i; z = -2 - i$$

HT 61: (ĐH khối A-A1 - 2013) Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết dưới dạng lượng giác của z . Tìm phần thực và phần ảo

$$\text{của số phức: } w = (1 + i)z^5. \quad \text{Đ/s: } z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right); \text{ phần thực: } 16(\sqrt{3} + 1) \text{ phần ảo: } 16(1 - \sqrt{3})$$

HT 62: (ĐH khối D - 2013) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. Tính mô-đun của số phức

$$w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} \quad \text{Đ/s: } |w| = \sqrt{10}$$