CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC 2013 - 2014

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỞNG

HỌ VÀ TÊN: ……………………………………………………………

LỚP :……………………………………………………………….

TRƯỜNG :……………………………………………………………

HÀ NỘI, 8/2013

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

PHẦN I: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Xác định một mặt phẳng

• Ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. (*mp(ABC), (ABC)*)

• Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó thuộc mặt phẳng. (*mp(A,d)*)

• Hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng. (*mp(a, b))*

2. Một số qui tắc vẽ hình biểu diễn của hình không gian

• Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

• Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

• Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

• Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

II/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG TOÁN 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: *Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta có thể tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 1. Cho hình chóp *S.ABCD.* Đáy *ABCD* có *AB* cắt *CD* tại *E, AC* cắt *BD* tại *F.*

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng *(SAB) và (SCD)*, *(SAC)* và *(SBD).*

b) Tìm giao tuyến của *(SEF)* với các mặt phẳng *(SAD), (SBC).*

HT 2. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O. M, N, P* lần lượt là trung điểm của *BC, CD, SO*. Tìm giao tuyến của *mp(MNP)* với các mặt phẳng *(SAB), (SAD), (SBC)* và *(SCD).*

HT 3. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AC* và *BC. K* là một điểm trên cạnh *BD* sao *cho KD < KB*. Tìm giao tuyến của *mp(IJK)* với *(ACD)* và *(ABD).*

HT 4. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AD* và *BC*.

a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng *(IBC)* và *(JAD).*

b) M là một điểm trên cạnh *AB, N* là một điểm trên cạnh *AC*. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng *(IBC)* và *(DMN).*

HT 5. Cho tứ diện *(ABCD).* M là một điểm bên trong *ΔABD, N* là một điểm bên trong *ΔACD*. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng *(AMN) và (BCD)*, *(DMN)* và *(ABC).*

DẠNG TOÁN 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: *Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta có thể tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 6. Cho tứ diện *ABCD*. Trên *AC* và *AD* lần lượt lấy các điểm *M, N* sao cho *MN* không song song với *CD*. Gọi *O* là một điểm bên trong ΔBCD.

a) Tìm giao tuyến của *(OMN)* và *(BCD).*

b) Tìm giao điểm của *BC* và *BD* với mặt phẳng *(OMN).*

HT 7. Cho hình chóp *S.ABCD*. M là một điểm trên cạnh *SC*.

a) Tìm giao điểm của *AM* và *(SBD)*.

b) Gọi N là một điểm trên cạnh *BC*. Tìm giao điểm của *SD* và *(AMN)*.

HT 8. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AC* và *BC. K* là một điểm trên cạnh *BD* và không trùng với trung điểm của *BD*. Tìm giao điểm của *CD* và *AD* với mặt phẳng *(MNK).*

HT 9. Cho tứ diện *ABCD. M, N* là hai điểm lần lượt trên *AC* và *AD. O* là một điểm bên trong ΔBCD. Tìm giao điểm của:

a) *MN* và *(ABO).* b) *AO* và *(BMN).*

HT 10. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn *AB*. Gọi *I, J, K* là ba điểm lần lượt trên *SA, AB, BC.*

a) Tìm giao điểm của *IK* với *(SBD)*.

b) Tìm các giao điểm của mặt phẳng *(IJK)* với *SD* và *SC*.

DẠNG TOÁN 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui

Phương pháp:

- *Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.*
- *Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta có thể chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 11. Cho hình chóp *S.ABCD*. *Gọi I, J* là hai điểm cố định trên *SA* và *SC* với *SI > IA* và *SJ < JC.* Một mặt phẳng *(P)* quay quanh *IJ* cắt *SB* tại *M, SD* tại *N*.

a) CMR: *IJ, MN* và *SO* đồng qui $(O = AC \cap BD)$. Suy ra cách dựng điểm *N* khi biết *M*.

b) *AD* cắt *BC* tại *E, IN* cắt *MJ* tại *F*. CMR: *S, E, F* thẳng hàng.

c) *IN* cắt *AD* tại *P, MJ* cắt *BC* tại *Q*. CMR *PQ* luôn đi qua 1 điểm cố định khi *(P)* di động.

HT 12. Cho mặt phẳng (*P*) và ba điểm *A, B, C* không thẳng hàng ở ngoài *(P).* Giả sử các đường thẳng *BC*, *CA*, *AB* lần lượt cắt *(P)* tại *D, E, F*. Chứng minh *D, E, F* thẳng hàng.

HT 13. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *E, F, G* lần lượt là ba điểm trên ba cạnh *AB, AC, BD* sao cho *EF* cắt *BC* tại *I, EG* cắt *AD* tại *H*. Chứng minh *CD, IG, HF* đồng qui.

HT 14. Cho hai điểm cố định *A, B* ở ngoài mặt phẳng *(P)* sao cho *AB* không song song với *(P). M* là một điểm di động trong không gian sao cho *MA, MB* cắt *(P)* tại *A′, B′*. Chứng minh *A′B′* luôn đi qua một điểm cố định.

HT 15. Cho tứ diện *SABC*. Qua *C* dựng mặt phẳng *(P)* cắt *AB, SB* tại B_1, *B′*. Qua *B* dựng mặt phẳng *(Q)* cắt *AC, SC* tại *C1, C′*. *BB′, CC′* cắt nhau tại *O′*; BB_1, CC_1 cắt nhau tại O_1. Giả sử $O'O_1$ kéo dài cắt SA tại I.

HT 16. a) Chứng minh: AO_1, SO′, BC đồng qui. b) Chứng minh: I, B_1, B′ và I, C_1, C′ thẳng hàng.

DẠNG TOÁN 4: Xác định thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng (đi qua 3 điểm)

Phương pháp:

Dạng 1: Ba điểm nằm trên ba cạnh không đồng phẳng của hình chóp :

- *Xác định mặt phẳng chứa hai điểm cho trước.*
- *Xác định giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm đó với giai tuyến của mặt phẳng chứa nó với mặt phẳng chứa điểm còn lại*
- *Nối các đoạn thẳng với các giao điểm và điểm cho trước để xác định mặt phẳng cắt các cạnh của hình chóp*

**** Chú ý trong khi xác định thiết diện cần dự đoán mặt phẳng sẽ cắt những cạnh nào của hình chóp để dễ xác định***

Dạng 2: Có hai điểm nằm trên hai cạnh còn một điểm nằm trên một mặt của hình chóp

- Xác định giao tuyến của các mặt.
- Xác định giao điểm của đường nối hai điểm trên 2 cạnh đã cho với giao tuyến.
- Xác định giao điểm của đường nối điểm đó với điểm thứ ba trên mặt đã cho với các cạnh của hình chóp.

Chú ý: Nếu hai điểm trên hai cạnh không cùng thuộc một mặt bên thì tìm giao với các cạnh kéo dài và xác định các giao điểm thuộc mặt phẳng cắt. Đặc biệt hai điểm nằm trên hai đường chéo nhau cần xác định một mặt phẳng chứa một điểm trên cạnh và điểm trên mặt đã cho.

Dạng 3: ***Có một điểm nằm trên cạnh còn hai điểm kia nằm trên hai mặt khác***

- Tìm mặt phẳng chứa hai trong ba điểm đã cho sau đó tìm giao điểm của đường thẳng nối hai điểm ấy với một mặt thích hợp của hình chóp.
- Xác định giao điểm của các cạnh hình chóp với mặt phẳng thiết diện.

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 17. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I là ba điểm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

HT 18. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn CE = a. Kéo dài BD một đoạn DF=a. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện. *HD:* *b)* $\frac{a^2}{6}$

HT 19. Cho hình chóp S.ABC. M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng *(MNP)*.

HD: Thiết diện là 1 ngũ giác.

HT 20. Cho hình chóp *S.ABCD*. Trong ΔSBC, lấy một điểm M. Trong ΔSCD, lấy một điểm N.

a) Tìm giao điểm của MN và *(SAC)*.

b) Tìm giao điểm của SC với *(AMN)*.

c) Tìm thiết diện của hình chóp *S.ABCD* với mặt phẳng *(AMN)*.

HD: *a) Tìm* $(SMN)\cap(SAC)$ *b) Thiết diện là tứ giác.*

HT 21. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC.

a) Tìm giao tuyến của *(MNP)* với *(SAC)*, và giao điểm của *(MNP)* với SA.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với *(MNP)* và tính tỉ số mà *(MNP)* chia các cạnh SA, BC, CD.

HD: *b) Thiết diện là ngũ giác. Các tỉ số là: 1/3; 1; 1.*

HT 22. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD). Chứng minh (CGM) chứa CD.

b) Chứng minh (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp với (CGM).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với (AGM).

HD: b) Thiết diện là tứ giác c) Tìm (AGM)$\cap$(SAC). Thiết diện là tứ giác.

HT 23. Cho hình chóp *S.ABCD*, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Tìm giao điểm I của BN và *(SAC)* và giao điểm J của MN và *(SAC)*.

b) DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp *S.ABCD* với mặt phẳng (BCN).

HD: a) Gọi O=AC$\cap$BD thì I=SO$\cap$BN, J=AI$\cap$MN

b) J là điểm chung của (SAC) và (SDM)

c) Nối CI cắt SA tại P. Thiết diện là tứ giác BCNP.

HT 24. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình thang ABCD với AB//CD và AB > CD. Gọi I là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) quay quanh AI cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) IM kéo dài cắt BC tại P, IN kéo dài cắt CD tại Q. Chứng minh PQ luôn đi qua 1 điểm cố định.

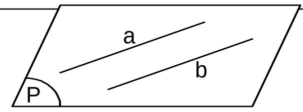
c) Tìm tập hợp giao điểm của IM và AN.

HD: a) Qua giao điểm của AI và SO=(SAC)$\cap$(SBD). b) Điểm A. c) Một đoạn thẳng.

§ 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa



$$a\ //\ b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$

2. Tính chất

- *Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.*

- *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

- *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: *Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:*

1. Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lí Talét đảo, …)

2. Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

3. Áp dụng định lí về giao tuyến song song.

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 25. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD. Chứng minh IJ//CD.

HT 26. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh: MN // CD.

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì?

HT 27. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

HT 28. Cho tam giác ABC nằm trong mặt phẳng (P). Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song và nằm về cùng một phía đối với (P). M, N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định I khi M, N di động.

b) E thuộc đoạn AM và EM = $\frac{1}{3}$EA. IE cắt AN tại F. Gọi Q là giao điểm của BE và CF. CMR AQ song song với Bx, Cy và (QMN) chứa 1 đường thẳng cố định khi M, N di động.

HT 29. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a) Chứng minh: PQ // SA. b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh: SK // AD // BC.

c) Qua Q dựng các đường thẳng Qx // SC và Qy // SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

DẠNG TOÁN 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

- *Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng.*
- *Áp dụng định lí về giao tuyến để tìm phương của giao tuyến.*

Giao tuyến sẽ là đường thẳng qua điểm chung và song song với đường thẳng ấy.

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 30. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm của ΔSAB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

HT 31. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM).

HT 32. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình thang với các đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD, SBC.

a) Tìm đoạn giao tuyến của (ADJ) với mặt (SBC) và đoạn giao tuyến của (BCI) với mặt (SAD).

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

HD: *b)* $\frac{2}{5}(a+b)$.

HT 33. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với KB = 2KD.

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích thiết diện đó. *HD:* *b)* $\frac{5a^2\sqrt{51}}{288}$

HT 34. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Tìm giao điểm I của Dx với mp(SAB). Chứng minh: AI // SB.

b) Tìm thiết diện của hình chóp SABCD với mp(AIC). Tính diện tích thiết diện.

HD: *b) Tam giác AMC với M là trung điểm của SD. Diện tích* $\frac{a^2\sqrt{14}}{8}$

§ 3: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

$$d \,//\, (P) \Leftrightarrow d \cap (P) = \varnothing$$

2. Tính chất

• *Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (P) và d song song với đường thẳng d´ nằm trong (P) thì d song song với (P).*

• *Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa d mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với d.*

• *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.*

• *Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.*

II. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG TOÁN 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: *Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng d´ nào đó nằm trong (P).*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 35. Cho hai hình bình hành ABCD va ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O, O′ lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO′ song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) M, N là 2 điểm lần lượt trên hai cạnh AE, BD sao cho AM = $\frac{1}{3}$AE, BN = $\frac{1}{3}$BD. Chứng minh MN // (CDFE).

HT 36. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC), (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB, SC đều song song với *(MNP)*.

c) Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC. Chứng minh G_1G_2 // (SBC).

HT 37. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của ∆ABD. M là 1 điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG // (ACD).

HD: Chứng minh MG song song với giao tuyến của (BMG) và (ACD).

HT 38. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O′ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng:

a) Điều kiện cần và đủ để OO′ // (BCD) là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$

b) Điều kiện cần và đủ để OO′ song song với 2 mặt phẳng (BCD), (ACD)

là BC = BD và AC = AD.

HD: Sử đụng tính chất đường phân giác trong tam giác.

HT 39. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A′ của đường thẳng AG với mp(BCD).

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA′ và Mx cắt (BCD) tại M′. Chứng minh B, M′, A′ thẳng hàng và BM′ = M′A′ = A′N.

c) Chứng minh GA = 3GA′.

DẠNG TOÁN 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: *Tìm phương của giao tuyến. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 40. Cho hình chóp *S.ABCD*. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA.

a) Tìm các giao tuyến của (P) với (SAB) và *(SAC)*.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

HD: *c) MN // BC*

HT 41. Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài (P) sao cho SB = a và SB ⊥ OA. Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB. Mặt phẳng (Q) qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM (0 < x < a).

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính diện tích hình thang đó. Tìm x để diện tích lớn nhất.

HD: *b)* $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4}$. S_{MNPQ} *đạt lớn nhất khi* $x = \dfrac{2a}{3}$

HT 42. Cho hình chóp *S.ABCD*. M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.

a) Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC), (SCD), *(SAC)*.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

HT 43. Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của (P) với (ICD).

b) Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với (P).

HT 44. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành. Gọi C′ là trung điểm của SC, M là 1 điểm di động trên cạnh SA. Mặt phẳng (P) di động luôn đi qua C′M và song song với BC.

a) Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Xác định thiết diện mà (P) cắt hình chóp SABCD. Xác định vị trí điểm M để thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm tập hợp giao điểm của 2 cạnh đối của thiết diện khi M di động trên cạnh SA.

HD: *a) Đường thẳng qua C′ và song song với BC.*

b) Hình thang. Hình bình hành khi M là trung điểm của SA.

c) Hai nửa đường thẳng.

§ 4: HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

(P) // (Q) $\Leftrightarrow$ *(P)* $\cap$ *(Q) =* $\varnothing$

2. Tính chất

• *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

• *Nếu đường thẳng d song song với mp(P) thì có duy nhất một mp(Q) chứa d và song song với (P).*

• *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

• *Cho một điểm A* $\notin$ *(P). khi đó mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mp(Q) đi qua A và song song với (P).*

• *Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.*

• *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.*

• ***Định lí Thales:*** *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

• ***Định lí Thales đảo:*** *Giả sử trên hai đường thẳng d và d´ lần lượt lấy các điểm A, B, C và A´, B´, C´ sao cho:*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

II. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG TOÁN 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: *Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng trong mặt phẳng kia.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 45. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh (OMN) // (SBC).

b) Gọi P, Q là trung điểm của AB, ON. Chứng minh PQ // (SBC).

HT 46. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có: $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a) CMR: IJ luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.

HD: *a) IJ song song với mp qua AB và song song CD.*

b) Tập hợp điểm M là đoạn EF với E, F là các điểm chia AB, CD theo tỉ số k.

HT 47. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) CMR: (OMN) // (SBC).

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song (SAB).

c) Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF // (SAD).

HD: *c) Chú ý:* $\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FB}}$

HT 48. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho: AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M′, N′.

a) Chứng minh: (CBE) // (ADF).

b) Chứng minh: (DEF) // (MNN′M′).

c) Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N di động.

HD: *c) Trung tuyến tam giác ODE vẽ từ O.*

DẠNG TOÁN 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

• *Tìm phương của giao tuyến bằng cách sử dụng định lí: Nếu 2 mặt phẳng song song bị cắt bởi 1 mặt phẳng thứ ba thì 2 giao tuyến song song.*

• *Sử dụng định lí trên để xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi 1 mặt phẳng song song với 1 mặt phẳng cho trước.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 49. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành tâm O với AC = a, BD = b. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với mp*(SBD)* và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với (P).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AI.

HD: *a) Xét 2 trường hợp: $I \in OA$, $I \in OC$. Thiết diện là tam giác đều.*

b) $$S_{thieát\ dieän} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2} & neáu\ 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2} & neáu\ \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

HT 50. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tam giác ABC nằm trong (P) và đoạn thẳng MN nằm trong (Q).

a) Tìm giao tuyến của (MAB) và (Q); của (NAC) và (Q).

b) Tìm giao tuyến của (MAB) và (NAC).

HT 51. Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz, Dt không nằm trong (ABCD). Một mặt phẳng (P) cắt bốn nửa đường thẳng tại A′, B′, C′, D′.

a) Chứng minh (Ax,By) // (Cz,Dt).

b) Chứng minh A′B′C′D′ là hình bình hành.

c) Chứng minh: AA′ + CC′ = BB′ + DD′.

HT 52. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB.

a) Chứng minh $(G_1G_2G_3)$ // (BCD).

b) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mp($G_1G_2G_3$). Tính diện tích thiết diện khi biết diện tích tam giác BCD là S.

c) M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho G_1M luôn song song với mp(ACD). Tìm tập hợp những điểm M.

HD: b) $\frac{4S}{9}$

HT 53. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Gọi H là trung điểm của A′B′.

a) Chứng minh CB′ // (AHC′).

b) Tìm giao điểm của AC′ với (BCH).

c) Mặt phẳng (P) qua trung điểm của CC′ và song song với AH và CB′. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.

HD:c) M, N, P, Q, R theo thứ tự chia các đoạn CC′, B′C′, A′B′, AB, AC theo các tỉ số 1, 1, 3, $\frac{1}{3}$*, 1.*

HT 54. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (BDA′) và (B′D′C) song song.

b) Chứng minh đường chéo AC′ đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của 2 tam giác BDA′, B′D′C. Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC′ làm ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mp(A′B′G_2). Thiết diện là hình gì?

HD: *c) Hình bình hành.*

HT 55. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Trên AB, CC′, C′D′, AA′ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = C′N = C′P = AQ = x ($0 \le x \le a$).

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại 1 điểm cố định.

b) Chứng minh mp(MNPQ) luôn chứa 1 đường thẳng cố định.

Tìm x để (MNPQ) // (A′BC′).

c) Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Thiết diện có đặc điểm gì? Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

HD: *a) MP và NQ cắt nhau tại tâm O của hình lập phương.*

b) (MNPQ) đi qua trung điểm R, S của BC và A′D′. $x = \frac{a}{2}$.

c) Thiết diện là lục giác MRNPSQ có tâm đối xứng là O.

Chu vi nhỏ nhất: $3a\sqrt{2}$; *chu vi lớn nhất:* $2a(\sqrt{2} + 1)$.

HT 56. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′.

a) Tìm giao tuyến của (AB′C′) và (BA′C′).

b) Gọi M, N lần lượt là 2 điểm bất kì trên AA′ và BC. Tìm giao điểm của B′C′ với mặt phẳng (AA′N) và giao điểm của MN với mp(AB′C′).

HT 57. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC′), (BCA′) và (CAB′) có một điểm chung O ở trên đoạn GG′ nối trọng tâm ΔABC và trọng tâm ΔA′B′C′. Tính $\frac{OG}{OG'}$. *HD:* $\frac{1}{2}$

ÔN TẬP

HT 58. Cho tứ diện ABCD có AB = 2a, tam giác BCD vuông tại C có BD = 2a, BC = a. Gọi E là trung điểm của BD. Cho biết $(\widehat{AB,CE}) = 60^0$.

a) Tính $2AC^2 - AD^2$ theo a.

b) (P) là 1 mặt phẳng song song với AB và CE, cắt các cạnh BC, BD, AE, AC theo thứ tự tại M, N, P, Q. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x = BM (0 < x < a). Xác định x để diện tích ấy lớn nhất.

c) Tìm x để tổng bình phương các đường chéo của MNPQ là nhỏ nhất.

d) Gọi O là giao điểm của MP và NQ. Tìm (P) để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ nhỏ nhất.

HD: *a) Gọi F là trung điểm của AD.*

Xét $\widehat{CEF} = 60^0, \widehat{CEF} = 120^0 \Rightarrow 2AC^2 - AD^2 = 6a^2$ *hoặc* $-2a^2$.

b) $S = x(a - x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \dfrac{a}{2}$ *c)* $x = \dfrac{a}{2}$

d) $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

O di động trên đoạn IJ nối trung điểm của AB và CE. Tổng nhỏ nhất khi O là hình chiếu của G lên IJ (G là trọng tâm tứ diện ABCD).

HT 59. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (P) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng qui hoặc song song và MNPQ thường là hình thang cân.

b) Đặt AM = x, AN = y. CMR: a(x + y) = 3xy. Suy ra: $\dfrac{4a}{3} \le x + y \le \dfrac{3a}{2}$.

c) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và s = x + y.

HD: *b)* $S_{\Delta AMN} = S_{AMI} + S_{ANI}$ *c)* $\dfrac{2a - s}{4}.\sqrt{s^2 - \dfrac{8as}{3}}$.

HT 60. Cho hình chóp *S.ABCD*. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, AC và BD cắt nhau tại G. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC lần lượt tại A′, B′, C′.

a) Tìm giao điểm D′ của SD với (P).

b) Tìm điều kiện của (P) để A′B′ // C′D′.

c) Với điều kiện nào của (P) thì A′B′C′D′ là hình bình hành? CMR khi đó:

$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}$$

d) Tính diện tích tứ giác A′B′C′D′.

HD: *b) (P) // SE.*

c) (P) // (SEF). Gọi $G' = A'C' \cap B'D'$. *Chứng minh:* $\dfrac{SA'}{SA} + \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2SG'}{SG}$

d) $S_{A'B'C'D'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

§ 5: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $a \perp b \Leftrightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = 90^0$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

1. Chứng minh góc giữa hai đường thẳng đó bằng 90^0.

2. Chứng minh 2 vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng đó vuông góc với nhau.

3. Sử dụng các tính chất của hình học phẳng (như định lí Pi–ta–go, ...).

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 61. Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng SA ⊥ BC, SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

HD: Chứng minh $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}$ *= 0*

HT 62. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

a) Chứng minh AO vuông góc với CD.

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

HD: *b)* $\cos(\widehat{AC,BM}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

HT 63. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.

a) CMR đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối diện thì vuông góc với 2 cạnh đó.

b) Tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện.

HD: *b)* $\arccos\dfrac{\left|a^2 - c^2\right|}{b^2};\ \arccos\dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2};\ \arccos\dfrac{\left|a^2 - b^2\right|}{c^2}$.

HT 64. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, SAB là tam giác vuông cân tại A, M là điểm trên cạnh AD (M ≠ A và D). Mặt phẳng (P) qua M song song với mp(SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Đặt AM = x. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

HT 65. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng AC ⊥ B′D′, AB′ ⊥ CD′, AD′ ⊥ CB′.

§ 6: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

$$d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (P)$$

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

$$\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

3. Tính chất

• **Mặt phẳng trung trực** của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

• $\begin{cases} a /\!/ b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$

• $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a /\!/ b$

• $\begin{cases} (P) /\!/ (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$

• $\begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) /\!/ (Q)$

• $\begin{cases} a /\!/ (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$

• $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a /\!/ (P)$

4. Định lí ba đường vuông góc

Cho $a \not\perp (P), b \subset (P)$, a′ là hình chiếu của a trên (P). Khi đó $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

• Nếu $d \perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = 90^0$.

• Nếu $d \not\perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{d,d'}\right)$ với d′ là hình chiếu của d trên (P).

Chú ý: $0^0 \leq \left(\widehat{d,(P)}\right) \leq 90^0$.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

**** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng***

Để chứng minh $d \perp (P)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong (P).*
- *Chứng minh d vuông góc với (Q) và (Q) // (P).*
- *Chứng minh d // a và $a \perp (P)$.*

**** Chứng minh hai đường thẳng vuông góc***

Để chứng minh $d \perp a$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a.*
- *Sử dụng định lí ba đường vuông góc.*
- *Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 66. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông tâm O. SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) CMR: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

c) CMR: HK ⊥ (SAC). Từ đó suy ra HK ⊥ AI.

HT 67. Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B; SA ⊥ (ABC).

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB).

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh: AH ⊥ SC.

HT 68. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết: SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh: SO ⊥ (ABCD).

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. CMR: IJ ⊥ (SBD).

HT 69. Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: BC ⊥ (AID).

b) Vẽ đường cao AH của ΔAID. Chứng minh: AH ⊥ (BCD).

HT 70. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC). Chứng minh rằng:

a) BC ⊥ (OAH).

b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

HT 71. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. CMR: $SH \perp AC$.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: $BM \perp SA$. Tính AM theo a.

HD: a) $a, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

HT 72. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) CMR: $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh: $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

HT 73. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình chữ nhật có AB = a, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh: $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với mp(HIJ). CMR: $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$.

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

HD: a) $a\sqrt{2}$. c) $\dfrac{8a^2}{15}$.

HT 74. Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) Tam giác SDE vuông tại S.

b) $SD \perp CE$.

c) Tam giác SCD vuông.

HT 75. Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P). Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ta lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C′ là hình chiếu của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC′.

a) Chứng minh: $CC' \perp (MBD)$.

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB. CMR: K là trực tâm của ΔBCD.

HT 76. Cho hình tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

DẠNG TOÁN 2: Tìm thiết diện qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng

Phương pháp: Tìm 2 đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với đường thẳng đã cho, khi đó mặt phẳng cắt sẽ song song (hoặc chứa) với 2 đường thẳng ấy.

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 77. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a; SA $\perp$ (ABCD) và SA = 2a. Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB. Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB. Đặt AM = x (0 < x < a).

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (P). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

HD: a) Hình thang vuông b) S = 2a(a – x).

HT 78. Cho tứ diện SABC, có đáy là tam giác đều cạnh a; SA $\perp$ (ABC) và SA = 2a. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện với (P) và tính diện tích của thiết diện này.

HD: $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

HT 79. Cho tứ diện SABC với ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA $\perp$ (ABC) và SA = a$\sqrt{3}$. M là 1 điểm tuỳ ý trên cạnh AB, đặt AM = x (0 < x < a). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện với (P).

b) Tính diện tích của thiết diện đó theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

HD: b) $S = \sqrt{3}x(a-x)$*; S lớn nhất khi* $x = \dfrac{a}{2}$.

HT 80. Cho hình tứ diện SABC với ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC) và SA = a. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

a) (P) qua S và vuông góc với BC.

b) (P) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC.

c) (P) qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB.

HD: a) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. *b)* $\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. *c)* $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

HT 81. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a$\sqrt{2}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB.

a) CMR: $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện. *HD: b)* $S = \dfrac{5a^2\sqrt{6}}{18}$

DẠNG TOÁN 3: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

- *Tìm giao điểm O của a với (P).*
- *Chon điểm A* $\in$ *a và dựng AH* $\perp$ *(P). Khi đó* $\widehat{AOH} = \widehat{(a,(P))}$

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 82. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O; SO $\perp$ (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $\widehat{(MN,(ABCD))} = 60^0$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

HD: a) $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; $SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$ b) $\sin\widehat{(MN,(SBD))} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

HT 83. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; SA $\perp$ (ABCD) và SA = a$\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b) SC và (SAB) c) SB và (SAC) d) AC và (SBC)

HD: a) 60^0 b) $\arctan\frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}$ d) $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

HT 84. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật; SA $\perp$ (ABCD). Cạnh SC = a hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β.

a) Tính SA.

b) CMR: AB = a$\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$.

HD: a) $a.\sin\alpha$

HT 85. Cho hình chóp SABC, có ABC là tam giác cân, AB = AC = a, $\widehat{BAC} = \alpha$. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α.

a) CMR: hình chiếu của S trên mp(ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Tính khoảng cách từ S đến mp(ABC).

HD: b) $\dfrac{a.\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

HT 86. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy là tam giác đều cạnh a, AA′ $\perp$ (ABC). Đường chéo BC′ của mặt bên BCC′B′ hợp với (ABB′A′) góc 30^0.

a) Tính AA′.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến (BA′C′).

c) Gọi N là trung điểm của cạnh BB′. Tính góc giữa MN và (BA′C′).

HD: a) $a\sqrt{2}$. b) $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. c) $\arcsin\sqrt{\frac{54}{55}}$.

HT 87. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; AA′ $\perp$ (ABC). Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B′C′ có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC′B′ góc β.

a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b) Chứng minh rằng: $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$.

HD: a) $AB = AC = 2a.\cos\alpha$; $BC = 2a\sqrt{2}\cos\alpha$; $AA' = a.\sin\alpha$.

§7 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

- Giả sử (P) $\cap$ (Q) = c. Từ I $\in$ c, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{(P),(Q)}\right) \le 90^0$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), φ = $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: S′ = S.cosφ

3. Hai mặt phẳng vuông góc

- (P) $\perp$ (Q) $\Leftrightarrow$ $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$

- **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau:** $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

4. Tính chất

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$

- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$

- $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- *Tìm hai đường thẳng a, b: a $\perp$ (P), b $\perp$ (Q). Khi đó:* $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.

- *Giả sử (P) $\cap$ (Q) = c. Từ I $\in$ c, dựng* $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 88. Cho hình chóp SABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với BA = BC = a; SA $\perp$ (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

HD: a) $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right) = 60^0$ b) $\cos\left(\widehat{(SEF),(SBC)}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

HT 89. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O; SA $\perp$ (ABCD). Tính SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60^0.

HD: SA = a.

HT 90. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2a; SA $\perp$ (ABCD) và SA = a$\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

HD: a) $\tan\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right) = \sqrt{7}$ b) $\cos\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

HT 91. Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a$\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SBC) và (ABC) b) (SBD) và (ABD) c) (SAB) và (SCD)

HD: a) 60^0 b) arctan$\sqrt{6}$ c) 30^0.

HT 92. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, OB = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SA $\perp$ (ABCD) và SO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh $\widehat{ASC}$ vuông.

b) Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

HD: c) 60^0.

HT 93. Cho hình chóp SABCD có SA $\perp$ (ABCD) và SA = a$\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng:

a) (SBC) và (ABC) b) (SAB) và (SBC) c) (SBC) và (SCD)

HD: a) 45^0 b) 60^0 c) arccos$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

DẠNG TOÁN 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

**** Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc***

Để chứng minh (P) $\perp$ (Q), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà a $\perp$ (Q).*
- *Chứng minh* $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$

**** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng***

Để chứng minh d $\perp$ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh d $\subset$ (Q) với (Q) $\perp$ (P) và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).*
- *Chứng minh d = (Q) $\cap$ (R) với (Q) $\perp$ (P) và (R) $\perp$ (P).*

• *Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.*

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 94. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc vơi mp(ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = a $\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

HT 95. Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD cùng vuông góc với đáy DBC. Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh: AB ⊥ (BCD).

b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với mp(ADC).

c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. CMR: OH ⊥ (ADC).

HT 96. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

c) Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔSBD. CMR: (ACF) ⊥ (SBC), (AEF) ⊥ (SAC).

HD: *b) 90^0.*

HT 97. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên 2 cạnh BC, DC sao cho BM = $\frac{a}{2}$, DN = $\frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

HT 98. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB′ và CC′ cùng vuông góc với mp(ABC).

a) Chứng minh (ABB′) ⊥ (ACC′).

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và ΔAB′C′. Chứng minh 2 mặt phẳng (BCC′B′) và (AB′C′) cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).

HT 99. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng SI ⊥ (ABCD), AD ⊥ (SAB).

b) Tính góc giữa BD và mp(SAD).

c) Tính góc giữa SD và mp(SCI).

HD: *b) arcsin* $\frac{\sqrt{6}}{4}$ *c) arcsin* $\frac{\sqrt{10}}{5}$

HT 100. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho SABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC..

a) Chứng minh rằng: SH^2 = HI.HJ.

b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

HD: b) $SH_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{bc}; \quad \alpha = \arctan\sqrt{\frac{c}{b}}$

HT 101. Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:

a) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (BCD).

b) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (ACD).

HD: a) $x^2 - y^2 + \frac{b^2}{2} = 0$ b) $x^2 - y^2 + b^2 - 2a^2 = 0$

HT 102. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) ; M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là MN ⊥ (SAM). Từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y.

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng 30^0 là $a(x + y) + \sqrt{3}\,xy = a^2\sqrt{3}$.

HD: a) $a^2 - a(x + y) + x^2 = 0$

HT 103. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60^0, cạnh SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SBD) ⊥ (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK ⊥ SA tại K. Tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^0$ và từ đó suy ra (SAB) ⊥ (SAD).

HD: b) $IK = \frac{a}{2}$.

DẠNG TOÁN 3: Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Phương pháp: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), $\varphi = \left(\widehat{(P),(Q)}\right)$ *. Khi đó:* $S' = S.\cos\varphi$

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 104. Cho hình thoi ABCD có đỉnh A ở trong mặt phẳng (P), các đỉnh khác không ở trong (P), BD = a, AC = $a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi lên mặt phẳng (P) ta được hình vuông AB′C′D′.

a) Tính diện tích của ABCD và AB′C′D′. Suy ra góc giữa (ABCD) và (P).

b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của CB, CD với (P). Tính diện tích của tứ giác EFDB và EFD′B′.

HD: a) 450 b) $S_{EFDB} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$; $S_{EFD'B'} = \frac{3a^2}{4}$

HT 105. Cho tam giác cân ABC có đường cao AH = $a\sqrt{3}$, đáy BC = 3a; BC ⊂ (P). Gọi A′ là hình chiếu của A trên (P). Khi ΔA′BC vuông tại A′, tính góc giữa (P) và (ABC).

HD: 30^0

HT 106. Cho tam giác đều ABC cạnh a, nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn BD = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, CE = $a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a) Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích của tam giác ADE.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (P).

HD: a) $\frac{3a^2}{4}$ b) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

HT 107. Cho hình chóp SABC có các mặt bên hợp với đáy một góc φ.

a) Chứng minh hình chiếu của S trên mp(ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC.

b) Chứng minh: $S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCA} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{\cos\varphi}$

HT 108. Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp (ABC)$.

b) $(S_{SBC})^2 = S_{ABC}.S_{HBC}$. Từ đó suy ra: $(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2$.

HT 109. Trong mặt phẳng (P) cho ΔOAB vuông tại O, AB = 2a, OB = a. Trên các tia vuông góc với (P) vẽ từ A và B và ở về cùng một bên đối với (P), lấy AA′ = a, BB′ = x.

a) Định x để tam giác OA′B′ vuông tại O.

b) Tính A′B′, OA′, OB′ theo a và x. Chứng tỏ tam giác OA′B′ không thể vuông tại B′. Định x để tam giác này vuông tại A′.

c) Cho x = 4a. Vẽ đường cao OC của ΔOAB. Chứng minh rằng $CA' \perp A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (OA′B′) và (P).

HD: a) x = 0 b) x = 4a c) arccos $\dfrac{\sqrt{39}}{26}$

§8 KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

$d(M,a) = MH$

$d(M,(P)) = MH$ trong đó H là hình chiếu của M trên a hoặc (P).

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

d(a,(P)) = d(M,(P)) trong đó M là điểm bất kì nằm trên a.

d((P),(Q) = d(M,(Q)) trong đó M là điểm bất kì nằm trên (P).

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

• Đường thẳng Δ cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a, b.

• Nếu Δ cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.

• Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 1: Giả sử $a \perp b$:

• Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A.

• Dựng $AB \perp b$ tại B

$\Rightarrow$ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Sử dụng mặt phẳng song song.

• Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.

• Chọn $M \in a$, dựng $MH \perp (P)$ tại H.

• Từ H dựng đường thẳng $a' // a$, cắt b tại B.

• Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại A.

$\Rightarrow$ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: d(a,b) = AB = MH = a(a,(P)).

Cách 3: Sử dụng mặt phẳng vuông góc.

• Dựng mặt phẳng $(P) \perp a$ tại O.

• Dựng hình chiếu b' của b trên (P).

• Dựng $OH \perp b'$ tại H.

• Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.

• Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A.

$\Rightarrow$ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: d(a,b) = AB = OH.

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 110. Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) OA và BC. b) AI và OC.

HD: *a)* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

HT 111. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD.

HD: *a)* $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ *b)* $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

HT 112. Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, Bc đồng qui.

b) Chứng minh SC ⊥ (BHK), HK ⊥ (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

HD: c) Gọi E = AH ∩ BC. Đường vuông góc chung của BC và SA là AE.

HT 113. a) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì dường vuông góc chung của AB và CD là đường nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD .

b) Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD, AD = BC.

HD: b) Giả sử BC = a, AD = a′, AC = b, BD = b′. Chứng minh a = a′, b = b′.

HT 114. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS ⊥ (ABCD) và IS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) NP và AC b) MN và AP.

HD: *a)* $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ *b)* $\frac{a}{2}$

<u>DẠNG TOÁN 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song</u>

Để tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng (mặt phẳng) ta cần xác định đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến đường thẳng (mặt phẳng).

<u>BÀI TẬP CƠ BẢN</u>

HT 115. Cho hình chóp SABCD, có SA ⊥ (ABCD) và SA = a$\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kinh AD = 2a.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (P) song song với mp(SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

HD: a) d(A,(SCD)) = a$\sqrt{2}$ *;* *d(B,(SCD)) =* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ *c)* $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

HT 116. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có AA′ ⊥ (ABC) và AA′ = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, AB = a$\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA′ đến mặt phẳng (BCC′B′).

b) Tính khoảng cách từ A đến (A′BC).

c) Chứng minh rằng AB ⊥ (ACC′A′) và tính khoảng cách từ A′ đến mặt phẳng (ABC′).

HD: *a)* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *b)* $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ *c)* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

HT 117. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC), từ C đến mp(SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác BCFE.

HD: *a)* $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ *c)* $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

HT 118. Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60^0, nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax.

a) Tính AD và khoảng cách từ C đến mp(ABD).

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

HD: *a) AD =* $\frac{a}{2}$; *d(C,(ABD)) =* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *b)* $\frac{a\sqrt{93}}{31}$

HT 119. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO ⊥ (ABCD) và SO = $\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh (SOF) ⊥ (SBC).

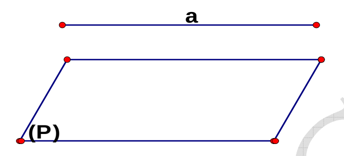
b) Tính các khoảng cách từ O và A đến (SBC).*HD:* *b) d(O,(SBC)) =* $\frac{3a}{8}$, *d(A,(SBC)) =* $\frac{3a}{4}$.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

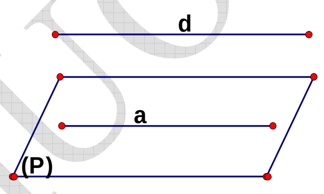
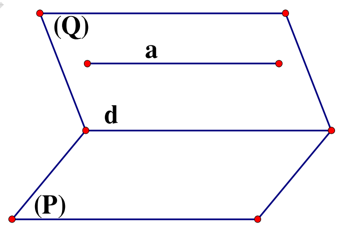
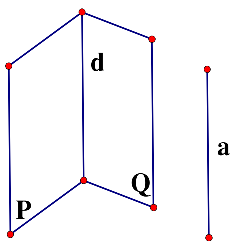
A.<u>QUAN HỆ SONG SONG</u>

§1.<u>ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG</u>

I. <u>Định nghĩa</u>:

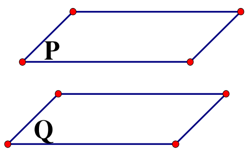
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$	

II.<u>Các định lý</u>:

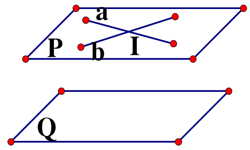
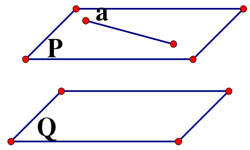
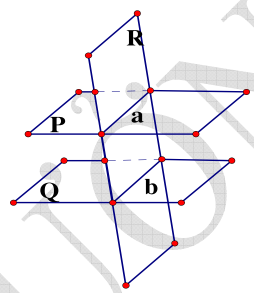
<u>ĐL1:</u>Nếu đường thẳng d không nằm trên mp(P) và song song với đường thẳng a nằm trên mp(P) thì đường thẳng d song song với mp(P)	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d//a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$	
<u>ĐL2:</u> Nếu đường thẳng a song song với mp(P) thì mọi mp(Q) chứa a mà cắt mp(P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.	$\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$	
<u>ĐL3:</u> Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$	

§2.<u>HAI MẶT PHẲNG SONG SONG</u>

I. <u>Định nghĩa:</u>

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P)//(Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$	

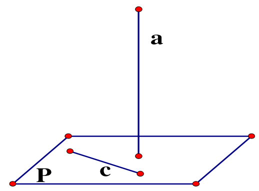
II.<u>Các định lý:</u>

<u>ĐL1:</u> Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \qquad \Rightarrow (P)//(Q) \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases}$	
<u>ĐL2:</u> Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$	
<u>ĐL3:</u> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R) \cap (P) = a \Rightarrow a//b \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases}$	

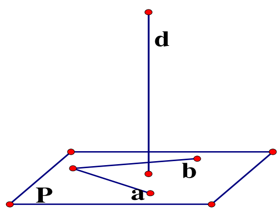
B.<u>QUAN HỆ VUÔNG GÓC</u>

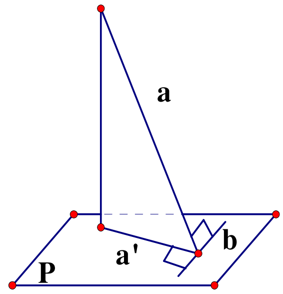
§1.<u>ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG</u>

I.<u>Định nghĩa</u>:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a \perp mp(P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$	

II. <u>Các định lý:</u>

<u>ĐL1:</u> Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d \perp a\ , d \perp b \\ a\ ,b \subset mp(P) \Rightarrow d \perp mp(P) \\ a\ ,b \text{ cắt nhau} \end{cases}$	

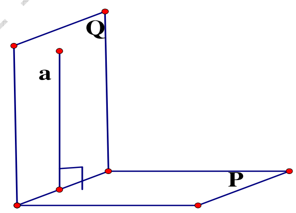
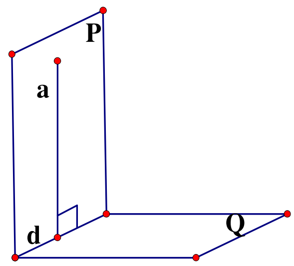
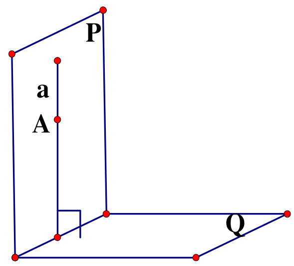
ĐL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$a \not\perp mp(P), b \subset mp(P)$ $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$	

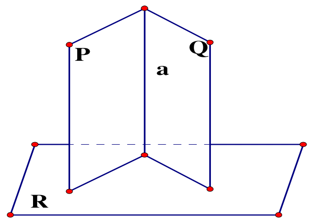
§2.HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I.Định nghĩa:

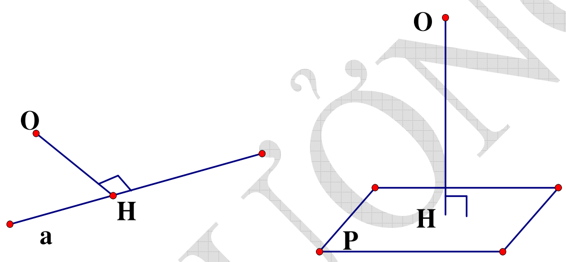
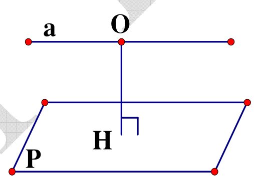
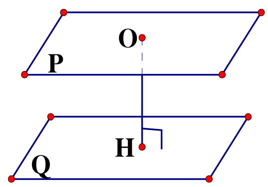
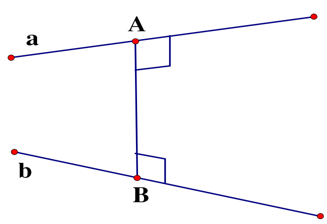
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

II. Các định lý:

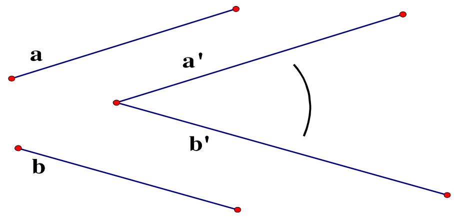
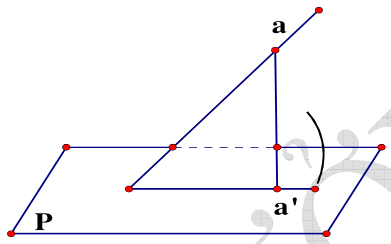
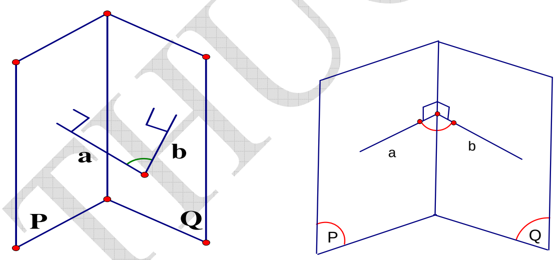
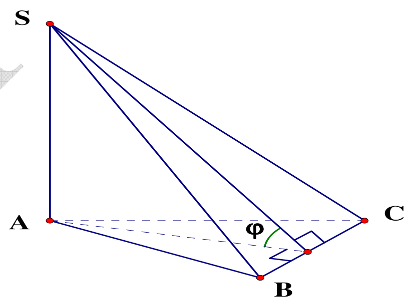
ĐL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
ĐL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	

ĐL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$	

§3.**KHOẢNG CÁCH**

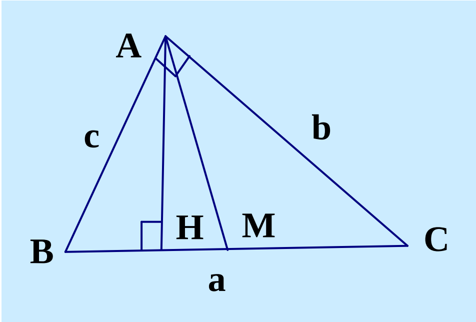
1. **Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng , đến 1 mặt phẳng:** Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH	
2. **Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:** Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P). d(a;(P)) = OH	
3. **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:** là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. d((P);(Q)) = OH	
4.**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:** là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. d(a;b) = AB	

§4.GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a’ của nó trên mp(P). ***Đặc biệt***: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mp(P) là 90^0.	
3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	
4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mp(P) và S’ là diện tích hình chiếu (H’) của (H) trên mp(P’) thì $S' = S\cos\varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P),(P’).	

KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông : cho ΔABC vuông ở A ta có :



a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC; \quad CA^2 = CH.CB$

c) AB. AC = BC. AH

d) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

e) BC = 2AM

f) $\sin B = \dfrac{b}{a}, \ \cos B = \dfrac{c}{a}, \ \tan B = \dfrac{b}{c}, \cot B = \dfrac{c}{b}$

g) b = a. sinB = a.cosC, c = a. sinC = a.cosB, a = $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{b}{\cos C}$,

b = c. tanB = c.cot C

2.Hệ thức lượng trong tam giác thường:

* <u>Định lý hàm số Côsin</u>: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* <u>Định lý hàm số Sin</u>: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

3. Các công thức tính diện tích.

a/ <u>Công thức tính diện tích tam giác</u>:

$S = \dfrac{1}{2} a.h_a = \dfrac{1}{2} a.b\sin C = \dfrac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Đặc biệt :* ΔABC vuông ở A : $S = \dfrac{1}{2} AB.AC$,* ΔABC đều cạnh a: ..

b/ <u>Diện tích hình vuông</u> : S = cạnh x cạnh

c/ <u>Diện tích hình chữ nhật</u> : S = dài x rộng

d/ <u>Diên tích hình thoi</u> : S = $\dfrac{1}{2}$ (chéo dài x chéo ngắn)

d/ <u>Diện tích hình thang</u> : $S = \dfrac{1}{2}$ (đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao

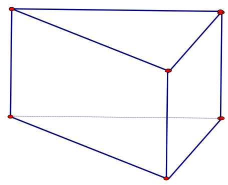
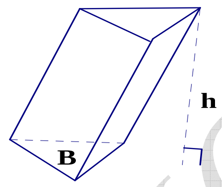
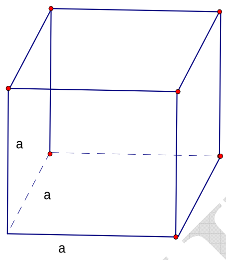
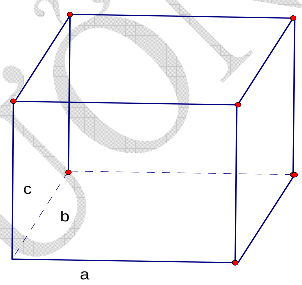
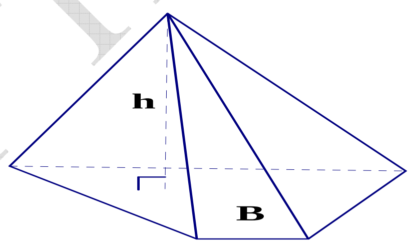
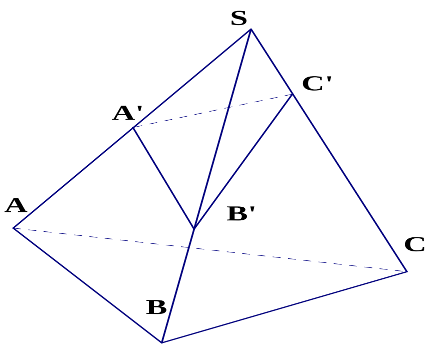
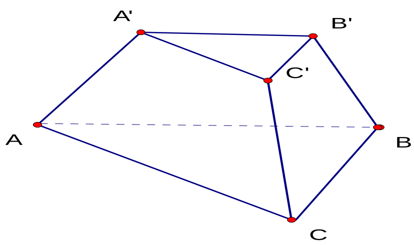
e/ <u>Diện tích hình bình hành</u> : S = đáy x chiều cao

f/ <u>Diện tích hình tròn</u> : $S = \pi.R^2$

KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN 12

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

1. *THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ*: $\boxed{V = B.h}$ với $\begin{cases} B: \textit{diện tích đáy} \\ h: \text{ chiều cao} \end{cases}$	 
a) ***Thể tích khối hộp chữ nhật***: $\boxed{V = a.b.c}$ với a,b,c là ba kích thước b) ***Thể tích khối lập phương***: $\boxed{V = a^3}$ với a là độ dài cạnh	 
2. *THỂ TÍCH KHỐI CHÓP*: $\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}$ với $\begin{cases} B: \textit{diện tích đáy} \\ h: \text{ chiều cao} \end{cases}$	
3. *TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN*: Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$	
4. *THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT*: $V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$ với $\begin{cases} B,\ \text{B}': \textit{diện tích hai đáy} \\ h: \text{ chiều cao} \end{cases}$	

Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là d = a$\sqrt{2}$,

Đường chéo của hình lập phương cạnh a là d = a$\sqrt{3}$,

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là d = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

II. CÁC DẠNG TOÁN

A. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Dạng toán 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

HT 1. Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a . Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

HT 2. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AC = a biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60º. Tính thể tích hình chóp . **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

HT 3. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60º. Tính thể tích hình chóp . **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60º. Tính thể tích hình chóp SABCD. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Đ/s: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

HT 5. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA=BC=a biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với (SAB) một góc 30º. Tính thể tích hình chóp . **Đs:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

HT 6. Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với đáy (ABC) và SA = h ,biết rằng tam giác ABC đều và mặt (SBC) hợp với đáy ABC một góc 30º .Tính thể tích khối chóp SABC . **Đs:** $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$

HT 7. Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông tại A và SB vuông góc với đáy ABC biết SB = a,SC hợp với (SAB) một góc 30º và (SAC) hợp với (ABC) một góc 60º .Chứng minh rằng $SC^2 = SB^2 + AB^2 + AC^2$ Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$

HT 8. Cho tứ diện ABCD có AD $\perp$ (ABC) biết AC = AD = 4 cm,AB = 3 cm, BC = 5 cm.

1) Tính thể tích ABCD. **Đs:** V = 8 cm³
2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). **Đs:** d = $\frac{12}{\sqrt{34}}$

HT 9. Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân tại A với BC = 2a , góc $\widehat{BAC} = 120^o$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45º . Tính thể tích khối chóp SABC. **Đs:** $V = \frac{a^3}{9}$

HT 10. Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông biết

SA $\perp$ (ABCD),SC = a và SC hợp với đáy một góc 60º Tính thể tích khối chóp **Đs:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$

HT 11. Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết rằng SA $\perp$ (ABCD) , SC hợp với đáy một góc 45º và $AB = 3a, BC = 4a$. Tính thể tích khối chóp. **Đs:** V = 20a³

HT 12. Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A bằng 60º và SA $\perp$ (ABCD) ,biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh SC = a. Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

HT 13. Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết AB = BC = a , AD = 2a , SA $\perp$ (ABCD) và (SCD) hợp với đáy một góc 60º. Tính thể thích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

HT 14. Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AB = 2R biết mặt (SBC) hợp với đáy ABCD một góc 45º.Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = \frac{3R^3}{4}$

Dạng toán 2: Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

HT 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáyABCD. Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB. Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

HT 2. Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều ,BCD là tam giác vuông cân tại D , (ABC) $\perp$ (BCD) và AD hợp với (BCD) một góc 60°. Tính thể tích tứ diện ABCD. **Đ/s :** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

HT 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°. Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC. Tính thể tích khối chóp SABC. **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3}{12}$

HT 4. Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông cân tại A với AB = AC = a biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) ,mặt phẳng (SAC) hợp với (ABC) một góc 45°. Tính thể tích của SABC. **Đs:** $V = \dfrac{a^3}{12}$

HT 5. Cho hình chóp SABC có $\widehat{BAC} = 90^o ; \widehat{ABC} = 30^o$; SBC là tam giác đều cạnh a và (SAB) $\perp$ (ABC). Tính thể tích khối chóp SABC. **Đs:** $V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{24}$

HT 6. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều;tam giác SBC có đường cao SH = h và (SBC) $\perp$ (ABC). Cho biết SB hợp với mặt (ABC) một góc 30° .Tính thể tích hình chóp SABC. **Đs:** $V = \dfrac{4h^3\sqrt{3}}{9}$

HT 7. Tứ diện ABCD có ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau biết $AD = a$ .Tính thể tích tứ diện. **Đs:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$

HT 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông . Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH = h ,nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB. Tính thể tích khối chóp SABCD . Đs: $V = \dfrac{4h^3}{9}$

HT 9. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật , tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) biết (SAC) hợp với (ABCD) một góc 30° .Tính thể tích hình chóp SABCD. **Đs:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

HT 10. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật có AB = 2a , BC = 4a, SAB $\perp$ (ABCD) , hai mặt bên (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc 30° .Tính thể tích hình chóp SABCD. **Đs:** $V = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$

HT 11. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi với AC = 2BD = 2a và tam giác SAD vuông cân tại S , nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Tính thể tích hình chóp SABCD. **Đs:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{12}$

HT 12. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AD = CD = a ; AB = 2a biết tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Tính thể tích khối chóp SABCD . **Đs:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Dạng toán 3: Khối chóp đều

HT 1. Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC . **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$

HT 2. Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a . Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều. Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

HT 3. Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC. Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD. Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC. **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$

HT 4. Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.
Đs: $V = \dfrac{3a^3}{16}$

HT 5. Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là 45°. Tính độ dài chiều cao SH của chóp SABC. Tính thể tích hình chóp SABC. **Đs:** $SH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ $V = \dfrac{a^3}{6}$

HT 6. Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp SABC. **Đs:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

HT 7. Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30^o. Tính thể tích hình chóp. **Đs:** $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$

HT 8. Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60^o. Tính thể tích hình chóp. **Đ/s**: $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}$

HT 9. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và $\widehat{ASB} = 60^o$. Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều. Tính thể tích hình chóp. **Đ/s:** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

HT 10. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h ,góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60^o. Tính thể tích hình chóp. **Đ/s:** $V = \frac{2h^3}{3}$

HT 11. Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45^o và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a. Tính thể tích hình chóp. **Đ/s:** $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

HT 12. Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$. **Đ/s:** AB = 3a

Dạng toán 4: Phương pháp tỷ số thể tích

HT 1. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$,SA vuông góc với đáy ABC , $SA = a$
Tính thể tích của khối chóp S.ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN. **Đ/s:** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}; V_{S.AMN} = \frac{2a^3}{27}$

HT 2. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện ABCD. Tính thể tích khối tứ diện CDEF. ***Đ/s:*** $V_{ABCD} = \frac{a^3}{6}; V_{D.CEF} = \frac{a^3}{36}$

HT 3. Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó. **Đ/s:** $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$

HT 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0 . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Tính thể tích khối chóp S.AEMF. **Đ/s:** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ $V_{AEMF} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

HT 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'. **Đ/s :** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}; V_{S.AB'C'D'} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$

HT 6. Cho tứ diên ABCD. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện AB'C'D và khối tứ diên ABCD. **Đ/s:** $k = \frac{1}{4}$

HT 7. Cho tứ diên ABCD có thể tích $9m^3$,trên AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' sao cho AB = 2AB' ;2AC = 3AD' ;AD = 3AD'. Tính tế tích tứ diện AB'C'D'. **Đ/s:** $V = 2\ m^3$

HT 8. Cho tứ diên đều ABCD có cạnh a. Lấy các điểm B';C' trên AB và AC sao cho $AB=\frac{a}{2};AC'=\frac{2a}{3}$. Tính thể tích tứ diên AB'C'D. **Đ/s:** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

HT 9. Cho tứ diênABCD có thể tích 12 m³ .Gọi M,P là trung điểm của AB và CD và lấy N trên AD sao cho DA = 3NA. Tính thể tích tứ diên BMNP. **Đ/s:** V = 1 m³

HT 10. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$,đường cao SA = a.Mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại H và cắt SC tại K. Tính thể tích hình chóp SAHK. **Đ/s:** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{40}$

HT 11. Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng 27m³ .Lấy A'trên SA sao cho SA = 3SA'. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy hình chóp cắt SB,SC,SD lần lượt tại B',C',D' .Tính thể tích hình chóp SA'B'C'D'. **Đ/s:** : V = 1 m³

HT 12. Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng 9m³, ABCD là hình bình hành , lấy M trên SA sao cho 2SA = 3SM. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N.Tính thể tích khối đa diên ABCDMN . **Đ/s:** : V = 4m³

HT 13. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao SA = h. Gọi N là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AN và song song với BD lần lượt cắt SB,SDF tại M và P. Tính thể tích khối chóp SAMNP. **Đ/s:** $V=\frac{a^2h}{9}$

HT 14. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC.Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần.Tính tỉ số thể tích 2 phần này. **Đ/s:** $k=\frac{1}{2}$

HT 15. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và lấy M trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=x$ Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau. **Đ/s:** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Dạng toán 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

HT 1. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh BC = $a\sqrt{2}$ và biết A'B = 3a. Tính thể tích khối lăng trụ. **Đ/s:** $V=a^3\sqrt{2}$

HT 2. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A’B’C’D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này. **Đ/s:** $V=9a^3$

HT 3. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ là tam giác đều cạnh a = 4 và biết diện tích tam giác A’BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ. **Đ/s:** $V=8\sqrt{3}$

HT 4. Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60^0 Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp . **Đ/s:** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

HT 5. Cho lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều biết rằng tất cả các cạnh của lăng trụ bằng a. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ. **Đ/s:** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; S = 3a²

HT 6. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là tứ giác đều cạnh a biết rằng $BD'=a\sqrt{6}$. Tính thể tích của lăng trụ. **Đ/s:** V = 2a³

HT 7. Cho lăng trụ đứng tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và biết tổng diện tích các mặt của lăng trụ bằng 96 cm² .Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** V = 64 cm³

HT 8. Cho lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 19,20,37 và chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng các cạnh đáy. Tính thể tích của lăng trụ. **Đ/s:** V = 2888

HT 9. Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước tỉ lệ thuận với 3,4,5 biết rằng độ dài một đường chéo của hình hộp là 1 m.Tính thể tích khối hộp chữ nhật. **Đ/s:** V = 0,4 m³

HT 10. Cho hình hộp chữ nhật biết rằng các đường chéo của các mặt lần lượt là $\sqrt{5};\sqrt{10};\sqrt{13}$. Tính thể tích khối hộp này . **Đ/s:** V = 6

Dạng toán 2: Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

HT 1. Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0 . Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

HT 2. Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác. vuông tại A với AC = a , $\widehat{ACB}$ = 60 ^{o} biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30^0. Tính AC' và thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = a^3\sqrt{6}$

HT 3. Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30^0. Tính thể tích và tổng diên tích của các mặt bên của lăng trụ . **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ $S = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

HT 4. Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD}$ = 60^o biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o. Tính thể tích của hình hộp. **Đ/s:** $V = \frac{3a^3}{2}$

HT 5. Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông cân tại B biết A'C = a và A'C hợp với mặt bên (AA'B'B) một góc 30^o . Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$

HT 6. Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông tại B biết BB' = AB = a và B'C hợp với đáy (ABC) một góc 30^o . Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

HT 7. Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết AB' hợp với mặt bên (BCC'B') một góc 30^o . Tính độ dài AB' và thể tích lăng trụ **Đ/s:** $AB' = a\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

HT 8. Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông tại A biết AC = a và $\widehat{ACB} = 60^o$ biết BC' hợp với mặt bên (AA'C'C) một góc 30^o. Tính thể tích lăng trụ và diện tích tam giác ABC'. **Đ/s:** $V = a^3\sqrt{6}$, S = $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

HT 9. Cho lăng trụ tam giác đều ABC A'B'C' có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC) bằng a và AA' hợp với mặt phẳng (A'BC) một góc 30^0. Tính thể tích lăng trụ **Đ/s:** $V = \frac{32a^3}{9}$

HT 10. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có đường chéo A'C = a và biết rằng A'C hợp với (ABCD) một góc 30^o và hợp với (ABB'A') một góc 45^o. Tính thể tích của khối hộp chữ nhật. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

HT 11. Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông và BD' = a . Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1. BD' hợp với đáy ABCD một góc 60^o .
2. BD' hợp với mặt bên (AA'D'D) một góc 30^o . **Đ/s:** 1)V = $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ 2)V = $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

HT 12. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AB = a ; AD = b ; AA' = c và BD' = AC' = CA' = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

1. Chúng minh ABCD A'B'C'D' là hộp chữ nhật.
2. Gọi x,y,z là góc hợp bởi một đường chéo và 3 mặt cùng đi qua một đỉng thuộc đường chéo. Chứng minh rằng: $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$.

Dạng toán 3: Lăng trụ đứng có góc giữa hai mặt phẳng

HT 1. Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0 .Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

HT 2. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều. Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ. **Đ/s:** $V = 8\sqrt{3}$

HT 3. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o.Tính thể tích khối hộp chữ nhật. **Đ/s:** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

HT 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AA' = 2a ; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o .Tính thể tích khối hộp chữ nhật. **Đ/s:** $V = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$

HT 5. Cho hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AA' = a biết đường chéo A'C hợp với đáy ABCD một góc 30^o và mặt (A'BC) hợp với đáy ABCD một góc 60^0 . Tính thể tích hộp chữ nhật. **Đ/s:** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

HT 6. Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông và cạnh bên bằng a biết rằng mặt (ABC'D') hợp với đáy một góc 30^o.Tính thể tích khối lăng trụ. **Đ/s:** $V = 3a^3$

HT 7. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và AC = 2a biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45^o. Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = a^3\sqrt{2}$

HT 8. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A với AB = AC = a và $\widehat{BAC} = 120^o$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45^o. Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 9. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B và BB' = AB = h biết rằng (B'AC) hợp với đáy ABC một góc 60^o. Tính thể tích lăng trụ. **Đ/s:** $V = \frac{h^3\sqrt{2}}{4}$

HT 10. Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC đều biết cạnh bên AA' = a
Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1. Mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 60^o .
2. A'B hợp với đáy ABC một góc 45^o.
3. Chiều cao kẻ từ A' của tam giác A'BC bằng độ dài cạnh đáy của lăng trụ.

Đ/s: 1) $V = a^3\sqrt{3}$; 2) V = $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; V = $a^3\sqrt{3}$

HT 11. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh bên AA' = 2a .Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:
1. Mặt (ACD') hợp với đáy ABCD một góc 45^o .
2. BD' hợp với đáy ABCD một góc 60^0 .
3. Khoảng cách từ D đến mặt (ACD') bằng a .

Đ/s: 1) V = $16a^3$. 2) V = $12a^3$ .3) V = $\frac{16a^3}{3}$

HT 12. Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a
Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1. Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60^o .
2. Tam giác BDC' là tam giác đều.
3. AC' hợp với đáy ABCD một góc 45^0 **Đ/s:** 1) $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$; 2) V = a^3 ; V = $a^3\sqrt{2}$

HT 13. Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A = 60o .Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:
1. Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60^o .
2. Khoảng cách từ C đến (BDC') bằng $\frac{a}{2}$
3. AC' hợp với đáy ABCD một góc 45^0

Đ/s: 1) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$; 2) V = $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$; V = $\frac{3a^3}{2}$

HT 14. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có BD' = 5a ,BD = 3a. Tính thể tích khối hộp trong các trường hợp sau đây:
1. AB = a
2. BD' hợp với AA'D'D một góc 30^o
3. (ABD') hợp với đáy ABCD một góc 30^0

Đ/s: 1) $V = 8a^3\sqrt{2}$; 2) V = $5a^3\sqrt{11}$; V = $16a^3$

Dạng toán 4: Khối lăng trụ xiên

HT 1. Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60°. Tính thể tích lăng trụ. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 2. Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60 .Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật. Tính thể tích lăng trụ . $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

HT 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với AB = $\sqrt{3}$ AD = $\sqrt{7}$ .Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60°. . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1. $V = 3$

HT 4. Cho lăng trụ ABCD A'B'C'D'có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 8 hợp với đáy ABC một góc 30°.Tính thể tích lăng trụ. Đs: V =336

HT 5. Cho hình hộp ABCD A'B'C'D'có AB =a;AD =b;AA' = c và $\widehat{BAD} = 30^o$ và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc 60°.Tính thể tích lăng trụ.

Đs: V = $\dfrac{abc\sqrt{3}}{4}$

HT 6. Cho lăng trụ tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A,B,C biết AA' = $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ .Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

HT 7. Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên BB'C'C hợp vớio đáy ABC một góc 60° .

1. Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.
2. Tính thể tích lăng trụ ABC A'B'C'. Đs: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 8. Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Cạnh b CC' = a hợp với đáy ABC 1 góc 60° và C' có hình chiếu trên ABC trùng với O .

1. Chứng minh rằng AA'B'B là hình chữ nhật. Tính diện tích AA'B'B.
2. Tính thể tích lăng trụ ABCA'B'C'. Đs: 1) $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ 2) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 9. Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và AA' = a.

1. Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ.
2. Tính thể tích lăng trụ. Đs: 1) 30° 2) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

HT 10. Cho lăng trụ xiên ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Hình chiếu của C' trên (ABC) là O.Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên AA'C'Cvà BB'C'C hợp với nhau một góc 90°

Đs: $V = \dfrac{27a^3}{4\sqrt{2}}$

HT 11. Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có 6 mặt là hình thoi cạnh a,hình chiếu vuông góc của A' trên(ABCD) nằm trong hình thoi,các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc 60° .

1. Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của ABCD.
2. Tính diện tích các mặt chéo ACC'A' và BDD'B'.
3. Tính thể tích của hộp. Đs: 2) $S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}; S_{BDD'B'} = a^2$. 3) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

HT 12. Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc
A = 60° chân đường vuông góc hạ từ B' xuống ABCD trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết BB' = a.

1. Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.
2. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

Đs: 1) 60° 2) $V = \dfrac{3a^3}{4} \& S = a^2\sqrt{15}$

ÔN TẬP KHỐI CHÓP VÀ LĂNG TRỤ

HT1. Cho tứ diện *ABCD* có *AD* vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*, $AD = 3a, AB = 2a, AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 60^{0}$. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *B* trên *AC* và *CD*. Đường thẳng *HK* cắt đường thẳng *AD* tại *E*. Chứng minh rằng *BE* vuông góc với *CD* và tính thể tích khối tứ diện *BCDE* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{26\sqrt{3}a^3}{9}$

HT2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác cân tại *A*, $AB = 2a, \widehat{BAC} = 120^0$. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa hai mặt phẳng *(SBC)* và mặt phẳng *(ABC)* bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo a, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC).

Đ/s: $V = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ $\alpha = 45^0$

HT3. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, *SA* vuông góc với đáy. Góc tạo bởi *SC* và mặt phẳng *(SAB)* bằng 30^0. Gọi *E* là trung điểm của *BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *DE, SC* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ $d = \dfrac{\sqrt{38}}{19}$

HT4. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, biết $AB = 2a, AD = a$. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* sao cho $AM = \dfrac{a}{2}$, cạnh *AC* cắt *MD* tại *H*. Biết *SH* vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)* và $SH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.HCD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC theo a. Đ/s: $V = \dfrac{4a^3}{15}; d = \dfrac{2a}{3}$

HT5. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB, BC, CD*. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$ và xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD. Đ/s :* $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3; R = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

HT6. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật. $AB = 2a, AD = 4a$ $SA \perp (ABCD)$ và góc giữa hai đường thẳng *SC* và mặt phẳng *(ABCD)* bằng 30^0. Gọi *H, M* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, N* ở trên cạnh *AD* sao cho $DN = a$. Tính thể tích khối chóp $S.AHMN$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng *MN* và *SB. Đ/s:* $V = \dfrac{8\sqrt{15}a^3}{9}; d = \dfrac{2a\sqrt{35}}{7}$

HT7. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* trùng với trọng tâm tam giác *BCD*. Đường thẳng *SA* tạo với mặt phẳng *(ABCD)* một góc 45^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AC* và *SD* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}; d = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{11}}$

HT8. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng *(SBC)* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{9}$; $d = \dfrac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{57}}$

HT9. Cho hình chóp *S.ACBD* có *SA* vuông góc với đáy, *ABCD* là hình chữ nhật với $AB = 3a\sqrt{2}, BC = 3a$. Gọi *M* là trung điểm của *CD* và góc giữa *(ABCD)* với *(SBC)* bằng 60^0. Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$ và tính thể tích tứ diện *(SABM). Đ/s:* $V = 9a^3\sqrt{3}$

HT10. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt phẳng *(SAB)* vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SB* và *AC* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}; d = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$

HT11. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình thang, $\widehat{BAD}=\widehat{ADC}=90^0$, $AB=3a$, $AD=CD=SA=2a$, $SA\perp(ABCD)$. Gọi *G* là trọng tâm ΔSAB, mặt phẳng (GCD) cắt *SA, SB* lần lượt tại *M, N*. Tính theo a thể tích khối chóp $S.CDMN$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM,BC. Đ/s: $V=\dfrac{16}{9}a^3;d=\dfrac{4a}{\sqrt{14}}$

HT12. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh $2a$, $SA=a,SB=a\sqrt{3},\widehat{BAD}=60^0$, $(SAB)\perp(ABCD)$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của *AB, BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và cosin góc giữa hai đường thẳng *SM, DN.*

Đ/s: $V=a^3;d=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

HT13. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật tâm *O*, $AB=a,BC=a\sqrt{3}$, tam giác SOA cân tại *S* và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa *SD* và *(ABCD)* bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa *SB, AC*.

Đ/s: $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3};d=\dfrac{3a}{4}$

HT14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AC=a,BC=2a$. Mặt phẳng (SAC) tạo với *(ABC)* góc 60^0. Hình chiếu *H* của *S* trên *(ABC)* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *HA* và *SB* theo a.

Đ/s: $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3};d=\dfrac{3a}{4}$

HT15. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật tâm *O*, $AB=a,BC=a\sqrt{3}$, tam giác *SOA* cân tại *S* và mặt phẳng *(SAD)* vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)*. Biết góc giữa *SD* và *(ABCD)* bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa *SB, AC*. Đ/s: $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3};d=\dfrac{3a}{4}$

HT16. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AD=a\sqrt{2},CD=2a,$ cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi *K* là trung điểm của *CD*, góc giữa hai mặt phẳng (SBK) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Chứng minh *BK* vuông góc với mặt phẳng *(SAC)*. Tính thể tích khối chóp *S.BCK* theo a.

Đ/s: $V=\dfrac{2a^3}{3}$

HT17. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng a, *SA* vuông góc với đáy. Góc tạo bởi *SC* và mặt phẳng *(SAB)* bằng 30^0. Gọi *E* là trung điểm của *BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *DE, SC* theo a. Đ/s: $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3};d=\dfrac{\sqrt{38}}{19}$

HT18. Cho hình chóp *S.ACBD* có đáy *ABCD* là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn có đường kính $AD=2a,SA\perp(ABCD),SA=a\sqrt{6},$ *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB*. Tìm thể tích khối chóp *H.SCD* và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AD* và *SC*. Đ/s: $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{14}\ d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

HT19. Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại *C*, $AB=3a,SB=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. Gọi *G* là trọng tâm tam giác ΔABC, $SG\perp(ABC)$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng *(SAC)*. Đ/s: $V=\dfrac{3a^3}{4};d=a\sqrt{3}$

HT20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại *A*, $AB=AC=a$, *M* là trung điểm của *AB*, hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ABC)* trùng với tâm *O* đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMC*, góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng *(SAB)*. Đ/s: $V=\dfrac{a^3\sqrt{30}}{24};d=\dfrac{a\sqrt{130}}{13}$

HT21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{6}, H$ là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB*. Tìm thể tích khối chóp *H.SCD* và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AD* và *SC.* Đ/s: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{14}; d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

HT22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*, $AD = DC, AB = 2AD$, $BC = a\sqrt{2}$. Tam giác *SBC* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, *SA* hợp với đáy góc 45^0. Tính thể tích hình chóp *S.ACBD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA, BC* theo a. Đ/s: $V = \dfrac{\sqrt{10}a^3}{4}$; $d = \dfrac{\sqrt{10}a}{3}$

HT23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a, tam giác *SAB* đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P, K* lần lượt là trung điểm của *BC, CD, SD, SB.* Tính thể tích khối chóp *S.ABMN.* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *MK* và *AP.*

Đ/s: $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{48}; d = \dfrac{3a}{2\sqrt{5}}$

HT24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng $2a(a > 0)$ $SA = a, SB = a\sqrt{3}, \widehat{BAC} = 60^0$, mặt phẳng *(SAB)* vuông góc với đáy. *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, BC.* Tính thể tích khối tứ diện *NSDC.* Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *SM* và *DN.*

Đ/s: $V = \dfrac{a^3}{4}; \cos\alpha = \dfrac{5}{4\sqrt{7}}$

HT25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật $AB = 2a$, tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với *(ABCD)*. Gọi *M* là trung điểm của *SD*, mặt phẳng *(ABM)* vuông góc với mặt phẳng *(SCD)* và đường thẳng *AM* vuông góc với đường thẳng *BD.* Tính thể tích khối chóp *S.BCM* và khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng *(SBC)*.

HT26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên $SA = SB = SD = a$; đáy *ABCD* là hình thoi có góc $\widehat{BAD} = 60^0$ và mặt phẳng (SDC) tạo với *(ABCD)* một góc 30^0. Tính thể tích hình chóp *S.ABCD*. Đ/s: $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$

HT27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD.* Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *S.ABC.* Đ/s: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}; R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

HT28. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có (A_1BC) tạo với đáy góc 60^0, tam giác A_1BC có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của BB_1 và CC_1. Tính thể tích khối tứ diện A_1AMN. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và AC. Đ/s: $V = 16\sqrt{3}; d = 3$

HT29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $2AC = BC = 2a$. Mặt phẳng *(SAC)* tạo với mặt phẳng *(ABC)* một góc 60^0. Hình chiếu của *S* lên mặt phẳng *(ABC)* là trung điểm *H* của *BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AH* và *SB.* Đ/s: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}; d = \dfrac{3a}{4}$

HT30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình vuông. $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*. *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD, DC*. Góc giữa mặt phẳng *(SBM)* và mặt phẳng *(ABC)* bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABNM* và khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng *(SBM).*

Đ/s: $V = \dfrac{25a^3}{24}; d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

HT31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại *A, B;* $AB = BC = a$. *SA* vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)*, $SA = a$. Khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng *(SAC)* bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD.* Đ/s: $V = \dfrac{a^3}{2}$

HT32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại *B*, $BA = a$. Tam giác *SAC* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng *(ABC).* Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SA, BC* biết góc giữa *MN* với mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AC, MN* theo a. Đ/s: $V = \frac{\sqrt{30}a^3}{12}; d = \frac{a\sqrt{30}}{16}$

HT33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có *SA* vuông góc với đáy, *ABCD* là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính *AD*, $AD = 2a$. Gọi *I* là trung điểm của *AB*, biết khoảng cách từ *I* tới mặt phẳng *(SCD)* bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo a và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng *SO, AD*, với *O* là giao điểm của *AC* và *BD. Đ.s:* $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

HT34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O,* cạnh $4a$ và $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu của đỉnh *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là trung điểm *H* của *OA*. Góc giữa hai mặt phẳng *(SCD)* và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp *S.ABCD* theo a và cosin góc tạo bởi đường thẳng *OA* và mặt phẳng *(SCD).* Đ/s: $V = 12\sqrt{3}a^3; \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

HT35. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài cạnh bằng 3 và điểm *M* thuộc cạnh CC_1 sao cho $CM = 2$. Mặt phẳng *(P)* đi qua *A, M* và song song với *BD* chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện đó. Đ/s: $V_1 = 9; V_2 = 18$

HT36. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A,* $AB = a, BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng *(ABC)* trùng với trung điểm của *AC*. Góc giữa hai mặt phẳng (BCC_1B_1) và *(ABC)* bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC theo a. Đ/s: $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}; d = \frac{3a}{4}$

HT37. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh bằng a. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1B_1 và B_1C_1. Tính thể tích khối tứ diện AD_1MN theo a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và D_1N. Đ/s: $V = \frac{a^3}{8}; d = \frac{3a}{\sqrt{21}}$

HT38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi *K* là trung điểm của CC_1. Tính thể tích khối chóp $A.A_1BK$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A_1B_1BK. Gọi *I* là trung điểm của BB_1, tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (A_1BK). Đ/s: $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}; R = \frac{a\sqrt{21}}{2}; d = \frac{a\sqrt{5}}{6}$

HT39. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đoạn nối hai tâm của hai mặt bên kề nhau có độ dài bằng a. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC_1 và B_1D_1. Đ/s: $V = 2\sqrt{2}a^3$; $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$

HT40. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều. Gọi *M* là trung điểm của cạnh BB_1. Biết đường thẳng A_1B, CM vuông góc với nhau và cách nhau một khoảng bằng $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Đ/s: $V = 2a^3\sqrt{3}$

HT41. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*, biết rằng khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (A_1BC) bằng $\frac{a}{\sqrt{15}}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ và cosin góc giữa hai đường thẳng A_1B và AC_1.

Đ/s: $V = \dfrac{3a^3}{4}; \cos\alpha = \dfrac{5}{8}$

TUYỂN TẬP ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM

HT 1. **AA1 – 13** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *A*, $\widehat{ABC} = 30^0, SBC$ là tam giác đều cạnh *a* và mặt bên *SBC* vuông góc với đáy. Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (SAB). **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3}{16}; d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$

HT 2. **B – 13** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a,* mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng *(SCD). Đ/s:* $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}; d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

HT 3. **D – 13** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thoi cạnh *a,* cạnh bên *SA* vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^0$, *M* là trung điểm của cạnh *BC* và $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ điểm *D* đến mặt phẳng *(SBC)*. **Đ/s:** $V = \dfrac{a^3}{4}; d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

HT 4. **AA1 – 12** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh *a*. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ABC)* là điểm *H* thuộc cạnh *AB* sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *BC* theo *a.*

Đ/S: $V = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{12}; d(SA, BC) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

HT 5. **B – 12** Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* với $SA = 2a, AB = a.$ Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *SC*. Chứng minh rằng *SC* vuông góc với *(ABH).* Tính thể tích của khối chóp *S.ABH* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{7\sqrt{11}a^3}{96}$

HT 6. **D – 12** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a.$ Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(BCD')* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}; d(A, (BCD')) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

HT 7. **A – 11** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B,* $AB = BC = 2a;$ hai mặt phẳng *(SAB)* và *(SAC)* cùng vuông góc mặt phẳng *(ABC)*. Gọi *M* là trung điểm của *AB;* mặt phẳng qua *SM* và song song với *BC*, cắt *AC* tại *N.* Biết góc giữa hai mặt phẳng *(SBC)* và *(ABC)* bằng $60^0.$ Tính thể tích khối chóp *S.BCNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SN* theo *a.*

Đ/s: $V = a^3\sqrt{3}; d(AB, SN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$

HT 8. **B – 11** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}.$ Hình chiếu vuông góc của điểm *A'* trên mặt phẳng *(ABCD)* trùng với giao điểm của *AC* và *BD*. Góc giữa hai mặt phẳng *(ADD'A')* và *(ABCD)* bằng $60^0.$ Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm *B'* đến mặt phẳng *(A'BD)* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{3a^3}{2}; d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

HT 9. **D – 11** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $BA = 3a, BC = 4a;$ mặt phẳng *(SBC)* vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*. Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0.$ Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng *(SAC)* theo *a.*

Đ/s: $V = 2a^3\sqrt{3}; d(B, (SAC)) = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$

HT 10. **A – 10** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh

AB và *AD*; *H* là giao điểm của *CN* với *DM.* Biết *SH* vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)* và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.CDNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *DM* và *SC* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{24}; d = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$

HT 11. B – 10 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a,$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và *(ABC)* bằng 60^0. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *A'BC.* Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *G.ABC* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}; R = \dfrac{7a}{12}$

HT 12. D – 10 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a,* cạnh bên $SA = a;$ hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng *(ACBD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC,* $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi *CM* là đường cao tam giác *SAC.* Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$

HT 13. A - 09 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *D*; $AB = AD = 2a; CD = a,$ góc giữa hai mặt phẳng *(SBC)* và *(ABCD)* bằng 60^0. Gọi *I* là trung điểm của cạnh *AD.* Biết mặt phẳng *(SBI)* và *(SCI)* cùng vuông góc với mặt phẳng *(ABCD).* Tính thể tích khối chóp *S.ABCD.*

Đ/s: $V = \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$

HT 14. B – 09 Cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $BB' = a,$ góc giữa đường thẳng *BB'* và mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0; tam giác *ABC* vuông tại *C* và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm *B'* lên mặt phẳng *(ABC)* trùng với trọng tâm của tam giác *ABC.* Tính thể tích khối tứ diện *A'ABC* theo *a.*

Đ/s: $V = \dfrac{9a^3}{208}$

HT 15. D – 09 Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác vuông tại *B.* Giả sử $AB = a; AA' = 2a; AC' = 3a.$ Gọi *M* là trung điểm của *A'C'* và *I* là giao điểm của *AM* và *A'C.* Tính thể tích tứ diện *IABC.* Tìm khoảng cách từ *A* tới *(IBC)*.

Đ/s: $V = \dfrac{4a^3}{9}; d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

HT 16. (A–08) Cho lăng trụ *ABC. A'B'C'* có độ dài cạnh bên bằng *2a,* đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, AB = a, AC = a $\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của *A'* trên *(ABC*) là trung điểm của *BC*. Tính theo a thể tích của khối chóp *A'.ABC* và cosin của góc giữa 2 đường thẳng AA' và *B'C'*.

HD: $V = \dfrac{a^3}{2}; \cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

HT 17. (B–08): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = a $\sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc mặt đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp *S.BMDN* và cosin của góc giữa hai đường thẳng *SM* và *DN*.

HD: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3};$ $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

HT 18. (D–08): Cho lăng trụ đứng *ABC. A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = a $\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của *BC.* Tính theo a thể tích của lăng trụ *ABC.A'B'C'* và khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AM, B'C*. *HD:*

$V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2};$ $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

HT 19. (A–07): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAD* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm *SB, BC, CD.* Chứng minh AM ⊥ BP và tính thể tích khối *CMNP. HD:* $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$

HT 20. (B–07): Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a.* Gọi *E* là điểm đối xứng của *D* qua trung điểm của *SA; M* là trung điểm của *AE,* N là trung điểm của *BC*. Chứng minh MN ⊥ BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *MN* và *AC*. *HD:* $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

HT 21. (D–07): Cho hình chóp *S.AB*CD có đáy *ABCD* là hình thang với $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BC = BA = a, AD = 2a. SA⊥(ABCD), $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB*. Chứng minh tam giác *SCD* vuông và tính khoảng cách từ *H* đến *(SCD). HD:* $d = \frac{a}{3}$

HT 22. (A–06): Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm *O* và *O′*, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm *O* lấy điểm *A*, trên đường tròn đáy tâm *O′* lấy điểm *B* sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện *OO′AB*. *HD:* $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

HT 23. (B–06): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA ⊥ (ABCD). Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD, SC*; *I* là giao điểm của *BM* và *AC*. Chứng minh rằng (SAC) ⊥ (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện *ANIB*. *HD:* $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

HT 24. (D–06): Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và $SA \perp (ABC)$. Gọi *M, N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB, SC*. Tính thể tích của hình *chóp A.BCMN*.

HD: $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$

HT 25. (Dự bị 1 B–07): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O, SA ⊥ (ABCD*). AB = a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB, SD*. Chứng minh *SC⊥(AHK)* và tính thể tích của tứ diện *OAHK*.

HD: $V = \frac{2a^3}{27}$

HT 26. (Dự bị 2 B–07): Trong mặt phẳng *(P),* cho nửa đường tròn đường kính *AB = 2R* và điểm *C* thuộc nửa đường tròn đó sao cho *AC = R*. Trên đường thẳng vuông góc với *(P)* tại *A* lấy điểm *S* sao cho $\left(\widehat{(SAB),(SBC)}\right) = 60^0$. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB, SC*. Chứng minh tam giác *AH*K vuông và tính thể tích tứ diện *SABC*.

HD: $V = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}$

HT 27. (Dự bị 1 D–07): Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy *ABC* là tam giác vuông, AB = AC = a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm đoạn AA_1 và BC_1. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của *AA1* và BC_1. Tính thể tích của tứ diện MA_1BC_1.

HD: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

HT 28. (Dự bị 2 D–07): Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. *M* là trung điểm của đoạn AA_1. Chứng minh BM ⊥ B_1C và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *BM* và B_1C.

HD: $d = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

HT 29. (Dự bị 1 A–06): Cho hình hộp đứng *ABCD.A'B'C'D'* có các cạnh AB = AD = a, AA' = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *A'D'* và *A'B'*. Chứng minh AC' ⊥ (BDMN). Tính thể tích khối chóp *A.BDMN*.

HD: $V = \frac{3a^3}{16}$

HT 30. (Dự bị 2 A–06): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh *SA* vuông góc với đáy, cạnh *SB* tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh *SA* lấy điểm *M* sao cho AM = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng *(BCM)* cắt cạnh *SD* tại *N*. Tính thể tích khối chóp *S.BCNM*.

HD: $V = \frac{10\sqrt{3}}{27}a^3$

HT 31. (Dự bị 1 B–06): Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, SA ⊥ (ABCD), SA = a. Gọi *C'* là trung điểm của *SC*. Mặt phẳng *(P)* đi qua *AC'* và song song với *BD*, cắt các cạnh *SB, SD* lần lượt tại *B', D'*. Tính thể tích khối chóp *S.AB'C'D'*.

HD: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

HT 32. (Dự bị 2 B–06): Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có *A'ABC* là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng *(ABC)* và *(A'BC)*. Tính tanα và thể tích khối chóp *A'.BB'C'C*.

HD: tanα = $\frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$; $V = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$

HT 33. (Dự bị 1 D–06): Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng a. Gọi *SH* là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm *I* của *SH* đến mặt phẳng *(SBC)* bằng *b*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*.

HD: $V = \frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$

HT 34. (Dự bị 2 D–06): Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′* có cạnh bằng *a* và điểm *K* thuộc cạnh *CC′* sao cho CK = $\frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) đi qua *A, K* và song song với *BD*, chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

HD: $V_1 = \frac{a^3}{3}$; $V_2 = \frac{2a^3}{3}$

HT 35. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2a, cạnh bên $SA = \sqrt{5}$. Một mặt phẳng *(P)* đi qua *AB* và vuông góc với mp*(SCD)* lần lượt cắt *SC* và *SD* tại *C′* và *D′*. Tính thể tích của khối đa diện *ADD′.BCC′*. *HD:* $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{6}$

HT 36. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với AB =a, AD = a$\sqrt{2}$, SA ⊥ (ABCD). Gọi *M,N* lần lượt là trung điểm của *AD* và *SC*, *I* là giao điểm của *BM* và *AC.*

a) Chứng minh mp(SAC) ⊥ BM.

b) Tính thể tích của khối tứ diện *ANIB*.

HT 37. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, cạnh bên SA = a$\sqrt{5}$. Một mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc với mp(SCD) lần lượt cắt SC và SD tại C′ và D′. Tính thể tích của khối đa diện ADD′.BCC′.

HD: Ghép thêm khối S.ABC'D' vào khối ADD'.BCC' thì được khối SABCD

$$\Rightarrow V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{6}$$

HT 38. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA ⊥ (ABC).Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

HD: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \left(\frac{SA^2}{SB^2}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$

PHẦN III: KHỐI TRÒN XOAY

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Mặt cầu – Khối cầu:

1. Định nghĩa

• **Mặt cầu:** $S(O;R) = \{M | OM = R\}$ • **Khối cầu:** $V(O;R) = \{M | OM \le R\}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P). Gọi d = d(O; (P)).

• Nếu *d* < *R* thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P), có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

• Nếu *d* = *R* thì (P) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H. (*(P) đgl tiếp diện của (S)*)

• Nếu *d* > *R* thì (P) và (S) không có điểm chung.

Khi d = 0 thì (P) đi qua tâm O và đgl mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng R đgl đường tròn lớn.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi d = d(O; Δ).

• Nếu *d* < *R* thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

• Nếu *d* = *R* thì Δ tiếp xúc với (S). (*Δ đgl tiếp tuyến của (S)*).

• Nếu *d* > *R* thì Δ và (S) không có điểm chung.

4. Mặt cầu ngoại tiếp – nội tiếp

	Mặt cầu ngoại tiếp	**Mặt cầu nội tiếp**
Hình đa diện	Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu	Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu
Hình trụ	Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu	Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ
Hình nón	Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón	Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón

5. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

• Cách 1: Nếu *(n – 2)* đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.

• Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

– Xác định trục Δ của đáy *(Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).*

– Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.

– Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

II. Diện tích – Thể tích

	Cầu	**Trụ**	**Nón**
Diện tích	$S = 4\pi R^2$	$S_{xq} = 2\pi Rh$	$S_{xq} = \pi Rl$

		$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\tilde{n}a\grave{u}y}$	$S_{tp} = S_{xq} + S_{\tilde{n}a\grave{u}y}$
Thể tích	$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^2 h$	$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1: Mặt cầu – Khối cầu

HT 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Gọi O là trung điểm của SC. Chứng minh: OA = OB = OC = SO. Suy ra bốn điểm A, B, C, S cùng nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

b) Cho SA = BC = a và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu nói trên.

HT 2. Trong mặt phẳng (P), cho đường thẳng d và một điểm A ngoài d. Một góc xAy di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh A, B, C, H, K thuộc cùng một mặt cầu.

b) Tính bán kính mặt cầu trên, biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^0$.

HT 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và K là hình chiếu của B trên SC.

a) Chúng minh ba điểm O, A, K cùng nhìn đoạn SB dưới một góc vuông. Suy ra năm điểm S, D, A, K B cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nói trên.

HT 4. Cho mặt cầu S(O; a) và một điểm A, biết OA = 2a. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B và cũng qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại C và D, biết $CD = a\sqrt{3}$.

a) Tính AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

HT 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng 60^0. Gọi O là tâm của tam giác ABC. Trong tam giác SAO dựng đường trung trực của cạnh SA, cắt SO tại K.

a) Tính SO, SA.

b) Chứng minh $\Delta SMK \sim \Delta SOA$ (với M là trung điểm của SA). Suy ra KS.

c) Chứng minh hình chóp K.ABC là hình chóp đều. suy ra: KA = KB +KC.

d) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

HT 6. Cho hình chóp S.ABC. biết rằng có một mặt cầu bán kính R tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

a) Chứng minh rằng S.ABC là hình chóp đều.

b) Tính chiều cao của hình chóp, biết rằng $IS = R\sqrt{3}$

HT 7. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh là a.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

HT 8. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

HT 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

HT 10. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là 13, 14, 15. Một mặt cầu tâm O, bán kính R = 5 tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa tam giác.

HT 11. Hình chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

HT 12. Cho hình chóp từ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

HT 13. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi O là tâm của ABCD và H là trung điểm của BC. Đường phân giác trong của góc SHO cắt SO tại I. Chứng minh rằng I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Tính bán kính mặt cầu này.

HT 14. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của các tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, H, K cùng ở trên một mặt cầu.

b) Cho AB = 10, BC = 24. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

HT 15. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = $a\sqrt{7}$ và SA ⊥ (ABCD). Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

a) Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, H, M, K cùng ở trên một mặt cầu.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

DẠNG TOÁN 2: Mặt trụ – Hình trụ – Khối trụ

HT 16. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng 2 cm. Trên đường tròn đáy tâm O lấy hai điểm A, B sao cho AB = 2 cm. Biết rằng thể tích tứ diện OO′AB bằng 8 cm^3. Tính chiều cao hình trụ và thể tích khối trụ.

HT 17. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng 2 cm. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A sao cho AO′ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính chiều cao hình trụ và thể tích khối trụ.

HT 18. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

HT 19. Một khối trụ có chiều cao bằng 20 cm và có bán kính đáy bằng 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính OA và O'B' lần lượt trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc 30^0. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục OO' của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

HT 20. Một hình trụ có bán kính đáy R = 53 cm, khoảng cách giữa hai đáy h = 56 cm. Một thiết diện song song với trục là hình vuông. Tính khoảng cách từ trục đến mặt phẳng thiết diện.

HT 21. Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao OO′ = h, A và B là hai điểm thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài AB = a không đổi $\left(h > a < \sqrt{h^2 + 4R^2}\right)$.

a) Chứng minh góc giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

b) Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

HT 22. Trong không gian cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay được tạo nên.

b) Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được tạo nên bởi hình trụ tròn xoay đó.

HT 23. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

HT 24. Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao bằng $R\sqrt{3}$; A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30^0.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

HT 25. Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao h. Gọi A và B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy (O, R) và (O′, R) sao cho OA và O′B hợp với nhau một góc bằng *x* và và hai đường thẳng AB, O′O hợp với nhau một góc bằng *y*.

a) Tính bán kính R theo h, x, y.

b) Tính S_{xq}, S_{tp} và thể tích V của hình trụ theo *h, x, y*.

HT 26. Cho hình trụ bán kính đáy bằng a và trục OO' = 2a. OA và OB' là hai bán kính của hai đường tròn đáy (O), (O') sao cho góc của OA và OB' bằng 30^0.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB'.

b) Tính tang của góc giữa AB' và OO'.

c) Tính khoảng cách giữa AB' và OO'.

HT 27. Một khối trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính R và có đường cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với O'B.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện OABO' là những tam giác vuông. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện OABO' và khối trụ.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng (α) là tiếp diện của mặt trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

HT1. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a, chiều cao 2a. Biết rằng O' là tâm của A'B'C'D' và (C) là đường tròn nội tiếp đáy ABCD. Tính thể tích khối nón có đỉnh O' và đáy (C).

HT2. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a và chiều cao 2a. Biết rằng O' là tâm của A'B'C' và (C) là đường tròn nội tiếp đáy ABC. Tính thể tích khối nón có đỉnh O' và đáy (C).

HT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60^0. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp đáy ABCD. Tính thể tích khối nón có đỉnh S và đáy (C).

HT4. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc IOM bằng 30^0 và cạnh IM = a. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay tạo thành.

b) Tính thể tích của khối nón tròn xoay tạo thành.

HT5. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

c) Một thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện này.

HT6. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ điểm O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$, $\widehat{SAB} = 60^0$. Tính độ dài đường sinh của hình nón theo a.

HT7. Thiết diện qua trục của một khối nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Tính thể tích khối nón và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

HT8. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'.

HT9. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình và thể tích của khối nón.

HT10. Cho hình chóp tam giác đều S. ABC có cạnh bên bằng a và góc giữa các mặt bên và mặt đáy là α. Một hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC, Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α.

HT11. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h và $\widehat{SAB} = \alpha$ ($\alpha > 45^0$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD.

HT12. Một hình nón có độ dài đường sinh bằng 1 và góc giữa đường sinh và đáy là α.

a) Tình diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.

b) Gọi I là điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho $\frac{SI}{SO} = k\left(0 < k < 1\right)$. Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục.