LÝ THUYẾT KHẢO SÁT HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Hàm số *f* đồng biến trên *K* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Hàm số *f* nghịch biến trên *K* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2. Điều kiện cần:

Giả sử *f* có đạo hàm trên khoảng *I*.

a) Nếu *f* đồng biến trên khoảng *I* thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

b) Nếu *f* nghịch biến trên khoảng *I* thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

3. Điều kiện đủ:

Giả sử *f* có đạo hàm trên khoảng *I*.

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ ($f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm) thì *f* đồng biến trên *I*.

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ ($f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm) thì *f* nghịch biến trên *I*.

c) Nếu $f'(x) = 0$ thì *f* không đổi trên *I*.

Chú ý: *Nếu khoảng I được thay bởi **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì f phải **liên tục** trên đó.*

4. Điều kiện hàm số luôn đồng biến trên một miền xác định.

Cho hàm số $y = f(x, m)$, m là tham số, có tập xác định D.

- Hàm số *f* đồng biến trên *D* $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$
- Hàm số *f* nghịch biến trên *D* $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

Chú ý:

- $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.
- Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

- Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$:

♣ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

♣ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a (trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$)

♣ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

- So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

♣ $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ ♣ $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ ♣ $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

- Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng *d* thì ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính y'.

Bước 2: Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

(1)

Bước 3: Biến đổi $\left|x_1 - x_2\right| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$

(2)

Bước 4: Sử dụng định lí Viet đưa (2) thành phương trình theo m.

Bước 5: Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số *f* xác định trên tập *D (D ⊂R)* và $x_0 \in D$.

a) x_0 – điểm cực đại của *f* nếu tồn tại khoảng $(a;b) \in D$ và $x_0 \in (a;b)$ sao cho

$$f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của *f*.

b) x_0 – điểm cực tiểu của *f* nếu tồn tại khoảng $(a;b) \in D$ và $x_0 \in (a;b)$ sao cho

$$f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của *f*.

c) Nếu x_0 là điểm cực trị của *f* thì điểm $\left(x_0; f(x_0)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số *f*.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số *f* có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý: Hàm số *f* chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

1. Định lí 1: Giả sử hàm số *f* liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;b) \setminus \{x_0\}$

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm** sang **dương** khi x đi qua x_0 thì *f* đạt **cực tiểu** tại x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương** sang **âm** khi x đi qua x_0 thì *f* đạt **cực đại** tại x_0.

2. Định lí 2: Giả sử hàm số *f* có đạo hàm trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì *f* đạt cực đại tại x_0.

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì *f* đạt cực tiểu tại x_0.

4. Quy tắc tìm cực trị

Qui tắc 1: Dùng định lí 1.

- Tìm $f'(x)$.
- Tìm các điểm x_i *(i = 1, 2, …)* mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Qui tắc 2: Dùng định lí 2.

- Tính $f'(x)$.
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm x_i (i = 1, 2, …).
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$ *(i = 1, 2, …)*.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i.

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

1. Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của *(C₁)* và *(C₂)* ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).
Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

2. Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

⇔ Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

⇔ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$.

IV. TOÁN TIẾP TUYẾN

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

- Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.
  Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.
- Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc *k* cho trước.

__Cách 1__: Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M_0\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
- Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k$ (1)
- Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

__Cách 2__: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.
- Δ tiếp xúc với *(C)* khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:
+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$
+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b \ (a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ **đi qua** điểm $A(x_A; y_A)$.

<u>**Cách 1:**</u> Tìm toạ độ tiếp điểm.

• Gọi $M_0\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0); y'_0\, f'(x_0)$.

• Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

• Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A = -y_0 = f'(x_0)(x_A - x_0)$ (2)

• Giải phương trình (2), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.

<u>**Cách 2:**</u> Dùng điều kiện tiếp xúc.

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc $k: y - y_A = k(x - x_A)$

• Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$$

(*)

• Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

V. ĐIỀU KIỆN TIẾP XÚC

1. Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Nghiệm của hệ (*) là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

2. Nếu $(C_1): y = px + q$ và $(C_2): y = ax^2 + bx + c$ thì

(C₁) và *(C₂)* tiếp xúc nhau ⇔ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

VI. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách giữa hai điểm A, B: AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Khoảng cách từ điểm M(x_0; y_0) đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$

$$d(M, \Delta) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

VII. ĐỒ THỊ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Cách 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị.

• Xét dấu biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

• Chia miền xác định thành nhiều khoảng, trong mỗi khoảng ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

• Vẽ đồ thị hàm số tương ứng trong các khoảng của miền xác định.

Cách 2: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị.

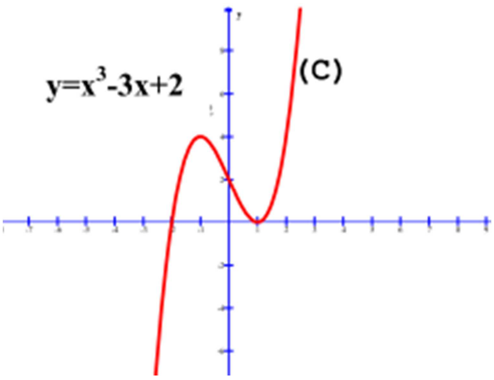
Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = \left|f(x)\right|$.

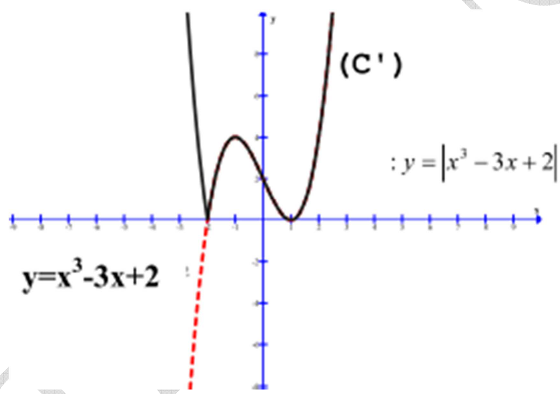
Đồ thị (C′) của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có thể được suy từ đồ thị (C) của hàm số y = f(x) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) ở phía dưới trục hoành qua trục hoành.

+ Đồ thị (C′) là hợp của hai phần trên.





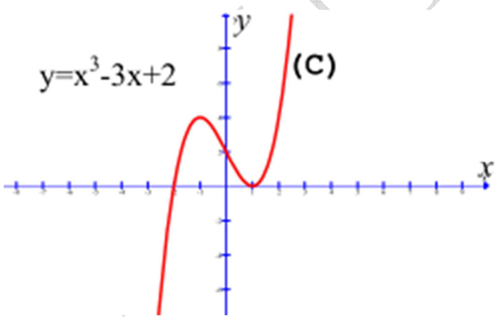
Dạng 2: Vẽ đồ thị của hàm số $y = f\left(|x|\right)$.

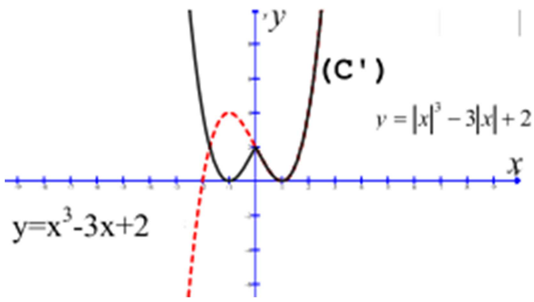
Đồ thị (C′) của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có thể được suy từ đồ thị (C) của hàm số y = f(x) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung, bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

+ Đồ thị (C′) là hợp của hai phần trên.





PHẦN I: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

HT 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

Giải

• Tập xác định: D = R. $y'=(m-1)x^2+2mx+3m-2$.

(1) đồng biến trên R $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow (m-1)x^2+2mx+3m-2\geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1=2m=0\\3m-2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}m-1>0\\m^2-(m-1)(3m-2)\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\-2m^2+5m-2\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ \left[\begin{array}{l}m\leq\frac{1}{2}\\m\geq 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\geq 2$$

HT 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$; $y'=3x^2+6x-m$,

(1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ $\Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow\ 3x^2+6x-m\geq 0\ \forall x\in(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x\geq m\ \forall x\in(-\infty;0)$

Xét hàm số f(x) = $3x^2+6x-m$ trên $(-\infty;0]$

Có f'(x) = 6x + 6; f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+			
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$			

Từ bảng biến thiên: $\Rightarrow m\leq -3$

HT 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$ có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m) = 1 > 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$$

Ta có: y' ≥ 0, ∀x (-∞;m) và (m + 1; +∞)

Do đó: hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$

HT 4. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Tìm m để hàm đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$

Hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m) \ge 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1} \ge m \text{ với } \forall x \in (0;+\infty)$$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2(2x^2 + x - 1)}{(4x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ trên $(0;+\infty)$, từ đó ta đi đến kết luận:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \ge m \Leftrightarrow \frac{5}{4} \ge m$$

HT 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ (1), (m là tham số). Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2).

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+ $m \le 0$, $y' \ge 0, \forall x \in (1;2) \Rightarrow m \le 0$ thoả mãn.

+ $m > 0$, $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\sqrt{m},\ 0,\ \sqrt{m}$.

Hàm số (1) đồng biến trên (1; 2) khi chỉ khi $\sqrt{m} \le 1 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$. Vậy $m \in \left(-\infty;1\right]$.

HT 6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Giải

• Tập xác định: D = R \ {–m}. $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ (1)

Để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì ta phải có $-m \ge 1 \Leftrightarrow m \le -1$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được: $-2 < m \le -1$.

HT 7. Chứng minh rằng, hàm số $y = \sin^2 x + \cos x$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\left[0;\pi\right]$

Ta có: $y' = \sin x(2\cos x - 1), x \in (0;\pi)$

Vì $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x > 0$ nên trên $(0;\pi): y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

+ Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right): y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$

+ Trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\pi\right): y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

HT 8. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$

+ Nếu m ≥ 3 thì y' ≥ 0, ∀x ∈ $\mathbb{R}$, khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó m ≥ 3 không thỏa mãn.

+ Nếu m < 3, khi đó: y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và hàm số nghịch biến trong đoạn: $\left[x_1; x_2\right]$ với độ dài l = $\left|x_2 - x_1\right|$

Theo Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -2, x_1x_2 = \dfrac{m}{3}$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 ⇔ l = 1

$\Leftrightarrow \left(x_2 - x_1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{4}{3}m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{4}$

PHẦN 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

HT 9. Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (m là tham số) (1). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 2(1 - 2m)x + 2 - m = g(x)$

YCBT ⇔ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(1) = -5m + 7 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m - 1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}.$$

HT 10. Cho hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$, m là tham số. Tìm các giá trị của m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

Giải

• Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương

⇔ PT $y' = 3(m + 2)x^2 + 6x + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (m + 2) \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m + 2) > 0 \\ P = \dfrac{m}{3(m + 2)} > 0 \\ S = \dfrac{-3}{m + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 2m + 3 > 0 \\ m < 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 0 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2$$

HT 11. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(5m+1)x - (4m^3 + 2)$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 \in (1;2]$

Giải

Vì hàm số bậc 3 nên để hàm số có hai điểm cực trị ⇔ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do hệ số của x^3 là dương nên khi đó: $x_{CT} > x_{CD}$

Ta có $y' = 6[x^2 - (m+2)x + 5m + 1], y' = 0 \Leftrightarrow m(x-5) = x^2 - 2x + 1$ (1)

Do $x = 5$ không là nghiệm của (1) $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow m = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 5} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{(x-5)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		5		9		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-		-	‖	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	16	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên và kết hợp với nhận xét trên

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 \in (1;2] \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le m < 0$

HT 12. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ (1). Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow m \le 0$

HT 13. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4 \quad (C_m)$. Tìm các giá trị của m để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục tọa độ.

Giải

Ta có: $y' = -4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Nếu m ≤ 0 ⇒ đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị duy nhất và điểm đó nằm trên trục tung.

Nếu m > 0 thì đồ thị hàm số khi đó có 3 điểm cực trị. Một điểm cực trị nằm trên trục tung và hai điểm cực trị còn lại có tọa độ: $(\pm\sqrt{m}; m^2 - 4)$ ⇒ Các điểm này chỉ có thể nằm trên trục hoành.

⇒ Điều kiện các điểm nằm trên trục hoành là $\begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases}$ ⇔ m = 2

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m \le 0 \end{array}\right.$

HT 14. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

Giải

•Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$.

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung ⇔ PT $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu ⇔ $3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

HT 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

Giải

• TXĐ: D = $\mathbb{R}$; $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Đồ thị (C_m) có 2 điểm CĐ, CT nằm cùng phía đối với trục tung ⇔ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu ⇔ $\begin{cases}\Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0\\ 2m - 1 > 0\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} m \neq 1\\ m > \dfrac{1}{2}\end{cases}$

HT 16. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

Giải

• PT hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành:

$$x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = 0 \ (1)$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\\ g(x) = x^2 + 2x + m - 2 = 0 \ (2)\end{array}\right.$

(C_m) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục 0x ⇔ PT (1) có 3 nghiệm phân biệt

⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác –1 ⇔ $\begin{cases}\Delta' = 3 - m > 0\\ g(-1) = m - 3 \neq 0\end{cases}$ ⇔ $m < 3$

HT 17. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + \dfrac{4}{3}(m+1)^3 \ (C)$. Tìm m để các điểm cực trị của hàm số (C) nằm về hai phía (phía trong và phía ngoài) của đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

Giải

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\\ x = 2(m+1)\end{array}\right.$

$y(0) = \dfrac{4}{3}(m+1)^3; y(2m+2) = 0$

Để hàm số có cực trị thì $m \neq -1$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0; \dfrac{4}{3}(m+1)^3\right); B(2m+2; 0)$

Gọi I là tâm đường tròn, khi đó $I(2;0)$ và $R = 1$.

A và B nằm về hai phía của đường tròn khi và chỉ khi: $\left(IA^2 - R^2\right)\left(IB^2 - R^2\right) < 0$

$$IA = \sqrt{4 + \frac{16}{9}(m+1)^6}; IB = \sqrt{4m^2}$$

$$\left(IA^2 - R^2\right)\left(IB^2 - R^2\right) < 0 \Leftrightarrow \left(3 + \frac{16}{9}(m+1)^6\right)(4m^2 - 1) < 0 \ \ (*)$$

Ta có: $\left(3 + \frac{16}{9}(m+1)^6\right) > 0 \, \forall x$

Suy ra: (*) $\Leftrightarrow 4m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \left|m\right| < \frac{1}{2}$

Kết hợp điều kiện ta có: $\left|m\right| < \frac{1}{2}$

HT 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng y = x.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì m ≠ 0.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m; 2m^3)$

A, B đối xứng nhau qua đường thẳng d: y = x $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

HT 19. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m$.

Hàm số có CĐ, CT ⇔ PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt ⇔ $m \neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$, $B(2m;4m^3-3m-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2m;4m^3)$

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m;2m^3-3m-1)$

Đường thẳng d: $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=(8;-1)$.

A và B đối xứng với nhau qua d ⇔ $\begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+8(2m^3-3m-1)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$

HT 20. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (1). Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)$.

PT $y'=0$ có $\Delta=1>0, \forall m \Rightarrow$ Đồ thị hàm số (1) luôn có 2 điểm cực trị $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$.

Chia y cho y′ ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}\right)y'+2x-m^2+m$

Khi đó: $y_1=2x_1-m^2+m$; $y_2=2x_2-m^2+m$

PT đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $y=2x-m^2+m$.

HT 21. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2\ (C_m)$. Tìm m để (C_m) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của hàm số cách đều đường thẳng $d: x-y-1=0$.

Giải

Ta có : $y'=3x^2-6x+m; y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0\ (1)$.

Hàm số (C_m) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt ⇔ $m<3$.

Giả sử $A(x_1;y_1), B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm cực trị của hàm số (C_m),$(x_1,x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Ta có : $y = y'\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{m}{3} - 1\right)x + 2 + \frac{m}{3}$ và $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$

Nên phương trình đường thẳng đi qua A, B là : $d' : y = 2\left(\frac{m}{3} - 1\right)x + 2 + \frac{m}{3}$.

Do đó, các điểm A, B cách đều đường thẳng (d) trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : (d') cùng phương với (d) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{m}{3} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ (Không thỏa mãn)

Trường hợp 2 : Trung điểm I của A, B nằm trên (d). Do (I) là trung điểm của AB nên tọa độ (I) là : $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = m \end{cases}$ Vì I nằm trên (d) nên ta có $1 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn)

KL : $m = 0$

HT 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

<u>Giải</u>

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3 \text{ (*)}$$

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$$\Rightarrow \ y_1 = y\left(x_1\right) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right);\ y_2 = y\left(x_2\right) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ: $y = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x + \left(2-\frac{m}{3}\right)$

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow$ xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x - 1$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3}+2\right) = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = x - 1$

$\Leftrightarrow y_I = x_I - 1 \Leftrightarrow \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3}+2\right)\left(x_1+x_2\right) + 2\left(2-\frac{m}{3}\right) = \left(x_1+x_2\right) - 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3}+3\right).2 = 6 - \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m = 0$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$

HT 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + mx \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Ta có: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$

Tại các điểm cực trị thì $y' = 0$, do đó tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn phương trình:

$$y = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$$

Như vậy đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$

nên Δ có hệ số góc $k_1 = \frac{2}{3}m - 2$.

d: $x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ⇒ d có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{2}$

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có d ⊥ Δ

$$\Rightarrow k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m - 2\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$$

Với m = 0 thì đồ thị có hai điểm cực trị là (0; 0) và (2; –4), nên trung điểm của chúng là I(1; –2). Ta thấy I ∈ d, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.

Vậy: m = 0

HT 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ (1) có đồ thị là (C_m). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số có CĐ, CT ⇔ $\Delta' = 9(m+1)^2 - 3.9 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$

Ta có $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m+1}{3}\right)y' - 2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

Giả sử các điểm cực đại và cực tiểu là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, I là trung điểm của AB.

$\Rightarrow y_1 = -2(m^2 + 2m - 2)x_1 + 4m + 1$; $y_2 = -2(m^2 + 2m - 2)x_2 + 4m + 1$

và: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

A, B đối xứng qua (d): $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

HT 25. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 7 > 0$ (luôn đúng với ∀m)

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 3(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_2(1 - 2x_2) = 3(m-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8m^2 + 16m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{4}$.

HT 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

+ Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ PT $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$ (1)

+ Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1);\ x_1x_2 = 3$. Khi đó:

$|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là $-3 \le m < -1-\sqrt{3}$ và $-1+\sqrt{3} < m \le 1$.

HT 27. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $\left|x_1 - x_2\right| > \dfrac{1}{3}$.

<u>Giải</u>

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$)

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{5}{4} \\ m < -1 \end{array}\right. \quad (*)$$

Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2. Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2(1-2m)}{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{2-m}{3} \end{cases}$

$$\left|x_1 - x_2\right| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 > \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-2m)^2 - 4(2-m) > 1 \Leftrightarrow 16m^2 - 12m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < \frac{3-\sqrt{29}}{8}$$

Kết hợp (*), ta suy ra $m > \dfrac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < -1$

HT 28. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m+1)(m+3)x + \dfrac{4}{3}$ $(1), m$ là tham số. Tìm m để hàm số (1) đạt cực đại, cực tiểu tại x_1x_2 sao cho $\left|x_1 + x_2 - \dfrac{1}{2}x_1x_2\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

<u>Giải</u>

Ta có : $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + (m+1)(m+3)$;

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m+1)(m+3) > 0$

$\Leftrightarrow -(m+1)(m+5) > 0 \Leftrightarrow -5 < m < -1$

Khi đó : $x_1 + x_2 = -m - 1; x_1x_2 = \dfrac{(m+1)(m+3)}{2}$

Nên $\left|x_1 + x_2 - \dfrac{1}{2}x_1x_2\right| = \left|-m - 1 - \dfrac{1}{4}(m+1)(m+3)\right| = \dfrac{1}{4}\left|-(m^2 + 8m + 7)\right|$

$= -\dfrac{1}{4}(m^2 + 8m + 7) = -\dfrac{1}{4}(m+4)^2 + \dfrac{9}{4} \le \dfrac{9}{4}, \forall m$

Suy ra : $\left|x_1 + x_2 - \dfrac{1}{2}x_1x_2\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{9}{4}$ khi $m = -4 (t/m)$

HT 29. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 12x^2 + 2mx - 3$. Ta có: $\Delta' = m^2 + 36 > 0, \forall m \Rightarrow$ hàm số luôn có 2 cực trị x_1, x_2.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m = \pm\dfrac{9}{2}$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$; $x_1 + 2x_2 = 3$ ĐS: $m = -105$.

HT 30. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$ có cực đại x_1, cực tiểu x_2 đồng thời x_1; x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

Giải

Cách 1: Miền xác định: D = $\mathbb{R}$ có $y' = x^2 - mx + m^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 = 0$

Hàm số đạt cực đại tại x_1 cực tiểu tại x_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi pt y'= 0 có hai nghiệm dương phân biệt, triệt tiêu và đổi dấu qua hai nghiệm đó:

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - m^2 > 0\\ m > 0\\ m^2 - 3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 < m < 2\\ m > 0\\ m < -\sqrt{3} \vee m > \sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 2 \quad (*)$$

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = m\\ x_1x_2 = m^2 - 3\end{cases}$

Mà $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4(m^2 - 3) = 5 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

Đối chiếu điều kiện (*) ta được: $m = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

HT 31. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1.$ Tìm m để hàm số có cực trị. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left|x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)\right|$ với x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

<u>Giải</u>

Ta có: $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -1$

Khi đó ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = -1 - m\\ x_1x_2 = \dfrac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)\end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}\left|m^2 + 8m + 7\right|$

Xét $t = \dfrac{1}{2}(m^2 + 8m + 7)$ trên $(-5;-1) \Rightarrow -\dfrac{9}{2} \le t < 0$

Từ đó ta có $A \le \dfrac{9}{2}$ khi $m = -4$

HT 32. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ (1) với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) đạt cực đại , cực tiểu sao cho $y_{CD} + y_{CT} = 2$

<u>Giải</u>

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x_1,x_2 \Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

$\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

$$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right. (*)$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=3 \end{cases}$

$$y_{CD}+y_{CT}=2 \Leftrightarrow x_1^3-3(m+1)x_1^2+9x_1-m+x_2^3-3(m+1)x_2^2+9x_2-m=2$$

$$\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3-3(m+1)(x_1^2+x_2^2)+9(x_1+x_2)-2m-2=0$$
$$\Leftrightarrow (m+1)(m^2+2m-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=1(t/m) \\ m=-3(t/m) \end{array}\right.$$

HT 33. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x+1$ (C_m). Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và: $y_{CD}+y_{CT}>2$

<u>Giải</u>

Ta có: $y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$\Delta'_{y'}=m^2-m^2+1=1>0$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow y_{CD}+y_{CT}=y_{(m+1)}+y_{(m-1)}$$

$$=[\frac{(m+1)^3}{3}-m(m+1)^2+(m^2-1)(m+1)+1]+[\frac{(m-1)^3}{3}-m(m-1)^2+(m^2-1)(m-1)+1]$$

$$=2m^3-2m+2>2 \Leftrightarrow m(m^2-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$$

KL: $\left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$

HT 34. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1$ (1), m là tham số. Tìm $m > 0$ để đồ thị hàm số (1) có giá trị cực đại, cực tiểu lần lượt là y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn: $2y_{CD} + y_{CT} = 4$.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3(m-2)x - 3(m-1), \forall x \in \mathbb{R}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = -1 \\ x = x_2 = m-1 \end{array}\right.$$

Chú ý rằng với $m > 0$ thì $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x_1 = -1$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = m - 1$. Do đó: $y_{CD} = y(-1) = \frac{3m}{2}, y_{CT} = y(m-1) = -\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1$

Từ giả thiết ta có: $2.\frac{3m}{2} - \frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 6m - 6 - (m+2)(m-1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 + m - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $m > 0$ ta có giá trị của m là $m = 1, m = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$

HT 35. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1). Tìm điểm M thuộc đường thẳng $d: y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Giải

• Các điểm cực trị là: A(0; 2), B(2; –2).

Xét biểu thức $g(x,y) = 3x - y - 2$ ta có:

$$g(x_A, y_A) = 3x_A - y_A - 2 = -4 < 0; \ g(x_B, y_B) = 3x_B - y_B - 2 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng d: $y = 3x - 2$.

Do đó MA + MB nhỏ nhất ⇔ 3 điểm A, M, B thẳng hàng ⇔ M là giao điểm của d và AB.

Phương trình đường thẳng AB: $y = -2x + 2$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$

HT 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó: điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1; -2-2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

HT 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - 2 + m$ (C).Tìm m để đồ thị hàm số (C) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số (C) tới trục Ox bằng khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (C) tới trục Oy.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 3m(m+2); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực trị với mọi m. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) là:

$A(m; m^3 + 3m^2 + m - 2), B(m+2; m^3 + 3m^2 + m - 6)$

Ta có hàm số là hàm bậc ba với hệ số $a = 1 > 0 \Rightarrow$ điểm cực đại nhỏ hơn điểm cực tiểu.

Vậy A là điểm cực đại, B là điểm cực tiểu.

Ta có: $d(A; Ox) = \left|m^3 + 3m + m - 2\right|, d(B, Oy) = \left|m + 2\right|$

Theo giả thiết ta có: $\left|m^3 + 3m + m - 2\right| = \left|m + 2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -1 \\ m = 1 \\ m = 0 \end{array}\right.$

HT 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3 \text{ (*)}$$

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right); y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là d: $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với d: $y = -4x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\frac{2m}{3} + 2\right) = -4 \\ \left(2 - \frac{m}{3}\right) \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

HT 39. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ một góc 45^0.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3 \ (*)$$

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow \ y_1 = y\left(x_1\right) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right);\ y_2 = y\left(x_2\right) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ: $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Đặt $k = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)$. Đường thẳng d: $x + 4y - 5 = 0$ có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

Ta có: $\tan 45^\circ = \left|\dfrac{k + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}k \\ k + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{3}{5} \\ k = -\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{39}{10} \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*), suy ra giá trị m cần tìm là: $m = -\frac{1}{2}$

HT 40. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1). Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = m + 4 \\ x = 0 \ \ \Rightarrow y = m \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị A(0 ; m) và B(−2 ; m + 4)

$\overrightarrow{OA} = (0;m),\ \overrightarrow{OB} = (-2;m+4)$. Để $\widehat{AOB} = 120^0$ thì $\cos AOB = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left(4 + (m+4)^2\right)}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2\left(4 + (m+4)^2\right)} = -2m(m+4) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ 3m^2 + 24m + 44 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ m = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

HT 41. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ (1), m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

Giải

Ta có: $y' = 3(x^2 - 2mx + m^3 - 1)$. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. $\Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Hai điểm cực trị: $A(m-1; m+1), B(m+1; m-3)$

$\overrightarrow{OA} = (m-1; m+1), \overrightarrow{OB} = (m+1; m-3)$.

ΔOAB vuông tại O khi O, A, B phân biệt và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

$\Leftrightarrow 2(m^2 - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

HT 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ (C_m). Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{array}\right.$

Điểm cực đại $M(m - 1; 2 - 3m)$ chạy trên đường thẳng cố định: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

Điểm cực tiểu $N(m + 1; -2 - m)$ chạy trên đường thẳng cố định: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

HT 43. Cho hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + m^3 + 3m^2$. Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn có 2 cực trị và khoảng cách giữa hai điểm này không phụ thuộc vào vị trí của m.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 6m(m+2); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 - m \\ x = -m \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (-∞;-2 - m) và (-m;+∞), nghịch biến trên khoảng (-2 - m;-m) và $x_{CD} = -2 - m; y_{CD} = 4; x_{CT} = -m; y_{CT} = 0$

Khi đó, khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $\sqrt{(-2-m+m)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

HT 44. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (1) với m là tham số thực. Định m để hàm số (1) có cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (1)

Lấy y chia cho y' ta được:

$$y = x^3 - 3x^2 - mx + 2 = \frac{1}{3}(x-1).y' + (-\frac{2m}{3} - 2)x + 2 - \frac{m}{3}$$

Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình

$$y = (-\frac{2m}{3} - 2)x + 2 - \frac{m}{3}$$

Đường thẳng này cắt 2 trục Ox và Oy lần lượt tai $A\left(\frac{m-6}{2(m+3)};0\right), B\left(0;\frac{6-m}{3}\right)$

Tam giác OAB cân khi và chỉ khi $OA = OB \Rightarrow \left|\frac{m-6}{2(m+3)}\right| = \left|\frac{6-m}{3}\right|$

$\Rightarrow m = 6; m = -\frac{9}{2}; m = -\frac{3}{2}$

Với m = 6 thì $A \equiv B \equiv O$ do đó so với điều kiện ta nhận $m = -\dfrac{3}{2}$

HT 45. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m-1)x^2 + (m-2)x + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đồng thời các điểm cực trị tạo với hai điểm $D\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$ và gốc tọa độ O tạo thành hình bình hành $OADB$.

Giải

Ta có: $y' = x^2 - (m+1)x + m - 2,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m-2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 3$

Ta có OADB là hình bình hành nên trung điểm của AB cũng chính là trung điểm của OD.

Từ đó, ta có hệ: $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{y_D}{2} \end{cases}$

Giả sử: $x_A = 1, x_B = m - 2$. Từ phương đầu tiên của hệ ta có: $m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$.

Với $m = 4$ ta có: A $A\left(1;\dfrac{11}{6}\right); B\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thấy thỏa mãn.

Kết hợp điều kiện $m \neq 3$ ta đi đến kết luận: $m = 4$ là giá trị cần tìm.

HT 46. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5\ \ (C_m)$. Tìm các giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ PT $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$ (*)

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0;m^2 - 5m + 5\right),\ B\left(\sqrt{2-m};1-m\right),\ C\left(-\sqrt{2-m};1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m};-m^2 + 4m - 4\right),\ \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m};-m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi ΔABC vuông tại A

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(m-2\right)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1 \qquad \text{(thoả (*))}$$

HT 47. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 \quad \left(C_m\right)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $f'\left(x\right) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2-m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT ⇔ PT $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ⇔ $m < 2$ (*)

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0;m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m};1-m\right),\ C\left(-\sqrt{2-m};1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m};-m^2 + 4m - 4\right),\ \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m};-m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi $\widehat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}.$$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$

HT 48. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ (m < 0)

Khi đó các điểm cực trị là: $A(0;m^2 + m),\ B\left(\sqrt{-m};m\right),\ C\left(-\sqrt{-m};m\right)$

$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$. ΔABC cân tại A nên góc 120° chính là $\widehat{A}$.

$$\widehat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m} + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m + 2m^4 = m - m^4 \Leftrightarrow 3m^4 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (loaïi) \\ m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} & \end{array}\right.$$

Vậy $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

HT 49. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m). Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị (Cm) là:

$$A(0; m-1),\ B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right),\ C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|y_B - y_A\right|.\left|x_C - x_B\right| = m^2\sqrt{m};\ AB = AC = \sqrt{m^4 + m},\ BC = 2\sqrt{m}$$

$$R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array}\right.$$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ ĐS: $m = 1,\ m = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

HT 50. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có đồ thị (C_m) . Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng 4.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 - m = 0 \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_g = m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ (*)

Với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = -\sqrt{m};\ x_2 = 0;\ x_3 = \sqrt{m}$. Hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2; x_3$. Gọi $A(0; 2m + m^4); B\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right); C\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$ là 3 điểm cực trị của (C_m) .

Ta có: $AB^2 = AC^2 = m^4 + m; BC^2 = 4m \Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A

Gọi M là trung điểm của BC$\Rightarrow M(0; m^4 - m^2 + 2m) \Rightarrow AM = \left|m^2\right| = m^2$

Vì ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường cao, do đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{2}.m^2.\sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$$

Vậy $m = \sqrt[5]{16}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$, S = 32 <u>ĐS</u>: $m = \pm 2$

HT 51. Cho hàm số $x^4 - 2mx^2 + 2$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm D$\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$

Giải

$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.(m > 0)$ Vậy các điểm thuộc đường tròn (P) ngoại tiếp các điểm cực trị là: A (0;2); $B(-\sqrt{m};-m^2+2);C(\sqrt{m};-m^2+2);D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$. Gọi I(x;y) là tâm đường tròn (P)

$$\begin{cases} IA^2 = ID^2 \\ IB^2 = IC^2 \\ IB^2 = IA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 2x\sqrt{m} = -2x\sqrt{m} \\ (x+\sqrt{m})^2 + (y+m^2-2)^2 = x^2 + (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 0(l) \\ m = 1(t/m) \end{array}\right. \end{cases}$$

Kết luận: m = 1

PHẦN 3: SỰ TƯƠNG GIAO

HT 52. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C). Định m để đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Giải

• PT hoành độ giao điểm của (C) và (d): $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt ⇔ PT $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 ⇔ $m > -3$

HT 53. Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x - 2m$ (C_m). Tìm m để (C_m) và trục hoành có đúng 2 điểm chung phân biệt.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

(C_m) và Ox có đúng 2 điểm chung phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ có CĐ, CT} \\ y_{CĐ} = 0 \text{ hoặc } y_{CT} = 0 \end{cases}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu ⇔ 2m ≠ 0 ⇔ m ≠ **0**

Ta có: $y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \Leftrightarrow -2m(8m^3 - 6m^3 - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \pm 1$

HT 54. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$. Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho A(0;1) và B là trung điểm của AC.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = mx + 1$ với đồ thị (C):

$$-2x^3 + 6x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(2x^2 - 6x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 6x + m = 0 \end{array}\right.$$

Với x = 0 ⇒ y = 1 ⇒ A(0;1)

Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó: $B(x_1; mx_1 + 1); C(x_2; mx_2 + 1)$. Vì trung điểm của AC nên $x_2 = 2x_1 \quad (1)$

Mà x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $2x^2 - 6x + m = 0$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{2} \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ⇒ m = 4

HT 55. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$ (m là tham số) (1). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

• Để ĐTHS (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương, ta phải có:

$$\begin{cases} (1) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} > 0,\ x_{CT} > 0 \\ a.y(0) < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Trong đó: + $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1) \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

+ $\Delta_{y'} = m^2 - m^2 + 1 = 0 > 0, \forall m$

+ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 = x_{CÑ} \\ x = m + 1 = x_{CT} \end{array}\right.$

Suy ra: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$

HT 56. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

Giải

• YCBT ⇔ $\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0$ (*) có 3 nghiệm phân biệt thoả $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

Ta có: (*) ⇔ $(x-1)(x^2+(1-3m)x-2-3m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(1-3m)x-2-3m=0 \end{array}\right.$

Do đó: YCBT ⇔ $g(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ phân biệt khác 1 và thoả $x_1^2+x_2^2>14$.

$\Leftrightarrow |m|>1$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y=x^3-3mx^2-3x+3m+2$

HT 57. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$, trong đó m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Giải

• Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

⇔ Phương trình $x^3-3x^2-9x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

⇔ Phương trình $x^3-3x^2-9x=-m$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

⇔ Đường thẳng $y=-m$ đi qua điểm uốn của đồ thị (C)

$\Leftrightarrow -m=-11 \Leftrightarrow m=11.$

HT 58. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-7$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Giải

• Hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3-3mx^2+9x-7=0$ (1)

Gọi hoành độ các giao điểm lần lượt là $x_1;x_2;x_3$ ta có: $x_1+x_2+x_3=3m$

Để $x_1;x_2;x_3$ lập thành cấp số cộng thì $x_2 = m$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\Rightarrow -2m^3 + 9m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{15}}{2} \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta có $m = \dfrac{-1-\sqrt{15}}{2}$ là giá trị cần tìm.

HT 59. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - mx$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

Giải

• Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$$x^3 - 3mx^2 - mx = x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3mx^2 - (m+1)x - 2 = 0$$

Đk cần: Giả sử (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ lần lượt lập thành cấp số nhân. Khi đó ta có: $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -m - 1 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$

Vì $x_1x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_2^3 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{2}$ nên ta có: $-m - 1 = 4 + \sqrt[3]{2}.3m \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$

Đk đủ: Với $m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$, thay vào tính nghiệm thấy thỏa mãn.

Vậy $m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$

HT 60. Cho hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ (1). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

Giải

Giả sử M $(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến (Δ) của (C) tại M:

$y = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$

(Δ) đi qua điểm P(0 ; 8) $\Leftrightarrow$ $8 = -4x_0^3 + 3x_0^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)(4x_0^2 - 7x_0 + 7) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$; $(4x_0^2 - 7x_0 + 7 > 0, \forall x_0)$

Vậy, có duy nhất điểm M (-1 ; -4) cần tìm.

HT 61. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số). Cho đường thẳng (d): $y = x + 4$ và điểm K(1; 3). Tìm các giá trị của m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (y = 4) \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \ \ (1) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ g(0) = m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $x_B + x_C = -2m;\ x_B.x_C = m + 2$.

Mặt khác: $d(K,d) = \dfrac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Do đó:

$$S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.d(K,d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow BC^2 = 256$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 256 \Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + ((x_B + 4) - (x_C + 4))^2 = 256$$

$\Leftrightarrow 2(x_B - x_C)^2 = 256 \Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C = 128$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (thỏa (*)).

Vậy $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

HT 62. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C). Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k $(k \in \mathbb{R})$. Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Giải

• Ta có: $d_k : y = kx + k \Leftrightarrow kx - y + k = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k \Leftrightarrow (x+1)\left[(x-2)^2 - k\right] = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } (x-2)^2 = k$$

d_k cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$

Khi đó các giao điểm là $A(-1;0), B\left(2 - \sqrt{k}; 3k - k\sqrt{k}\right), C\left(2 + \sqrt{k}; 3k + k\sqrt{k}\right)$.

$$BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2},\ \ d(O,BC) = d(O,d_k) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}.\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2} = 1 \Leftrightarrow k\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

HT 63. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi E là tâm đối xứng của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng qua E và cắt (C) tại ba điểm E, A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{2}$.

Giải

• Ta có: E(1; 0). PT đường thẳng Δ qua E có dạng $y = k(x-1)$.

PT hoành độ giao điểm của (C) và Δ: $(x-1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0$

Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt ⇔ PT $x^2 - 2x - 2 - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow k > -3$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}d(O,\Delta).AB = |k|\sqrt{k+3} \Rightarrow |k|\sqrt{k+3} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 đường thẳng thoả YCBT: $y=-x+1;\ y=\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(x-1)$.

HT 64. Cho hàm số $y=\frac{4}{3}x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+\frac{1}{3}$ có đồ thị $(C_m), m$ là tham số. Gọi A là giao điểm của (C_m) với trục tung. Tìm m sao cho tiếp tuyến của (C_m) tại A tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Giải

Ta có: $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$ và $y'=4x^2-2(2m+1)x+m+2$. Suy ra $y'(0)=m+2$

Tiếp tuyến của đồ thị tại A là $d: y=(m+2)x+\frac{1}{3}$. Đường thẳng d cắt Ox tại $B\left(\frac{-1}{3m+6};0\right)$

Khi đó diện tích tam giác tạo bởi d với hai trục tọa độ là:

$$S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\left|\frac{-1}{3m+6}=\frac{1}{18|m+2|}\right|$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{1}{18|m+2|}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow |m+2|=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{13}{6} \\ m=-\frac{11}{6} \end{array}\right.$

HT 65. Cho hàm số $y=x^3+mx+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành:

$$x^3+mx+2=0 \Leftrightarrow m=-x^2-\frac{2}{x}\ (x\neq 0)$$

Xét hàm số: $f(x)=-x^2-\frac{2}{x}\Rightarrow f'(x)=-2x+\frac{2}{x^2}=\frac{-2x^3+2}{x^2}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị (Cm) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

HT 66. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ có đồ thị (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Giải

• Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

$y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$

$\Delta'_{y'} = 9(m+1)^2 - 36m = 9(m-1)^2$

Th1: m = 1$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

$\Rightarrow$ m = 1(thỏa mãn)

Th2: $m \neq 1$$\Rightarrow$ Hàm số có cực đại và cực tiểu. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số

$\Rightarrow$ x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình y' = 0

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$

Lấy y chia cho y' ta được: $y = (\dfrac{x}{3} - \dfrac{m+1}{6})y' - (m-1)^2x - 2 + m(m+1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đi qua điểm cực đại và cực tiểu của hàm số

$$y = -(m-1)^2x - 2 + m(m+1)$$

Để hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} < 0$

$[-(m-1)^2x_1-2+m(m+1)][-(m-1)^2x_2-2+m(m+1)]>0$

$\Leftrightarrow (m-1)^4x_1x_2-(m-1)^2(m^2+m-2)(x_1+x_2)+(m^2+m-2)^2>0$

$\Leftrightarrow (m-1)^4m-(m-1)^2(m^2+m-2)(m+1)+(m^2+m-2)^2>0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2[(m-1)^2m-(m^2+m-2)(m+1)+(m+2)^2]>0$

$\Leftrightarrow m^3-2m^2+m-m^3-2m^2+m+2+m^2+4m+4>0 (V\text{ì } m\neq 1)$

$\Leftrightarrow m^2-2m-2<0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$

Kết luận: $1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$

HT 67. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Tìm m để đường thẳng (∆): $y=(2m-1)x-4m-1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

Giải

• Phương trình hoành độ giao của (C) và (∆): $x^3-3x^2-(2m-1)x+4m+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=x^2-x-2m-1=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(∆) cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt ⇔ (1) phải có nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} 2\neq x_1=x_2 \\ x_1=2\neq x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta>0 \\ f(2)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8m+5=0 \\ \dfrac{1}{2}\neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8m+5>0 \\ -2m+1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{5}{8} \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy: $m=-\dfrac{5}{8}$; $m=\dfrac{1}{2}$.

HT 68. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x \quad (1)$. Tìm m để đường thẳng (d): $y=mx$ cắt (C) tại ba điểm O (0;0), A và B. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, trung điểm I của đoạn AB luôn nằm trên một đường thẳng song song với Oy.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) với đồ thị (C) là:

$$x^3-6x^2+9x=mx \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-6x+9-m=0\ (2) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt O(0;0), A, B

$\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác x $\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 9-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 9 \quad (*)$$

Với điều kiện (*), A, B là 2 điểm có hoành độ lần lượt là $x_A; x_B$ là 2 nghiệm của phương trình (2)

I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên hoành độ I: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 3$

$\Rightarrow I \in \Delta$ có phương trình là x = 3, Δ song song với Oy khi m thay đổi $(0 < m \neq 9)$

HT 69. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + m + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m để d: $y = 2x - m - 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn hoặc bằng 1.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng (d):

$$\begin{aligned} & x^3-3mx^2+(m-1)x+m+1=2x-m-1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-3mx^2+(m-3)x+2m+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left[x^2+(1-3m)x-2m-2\right]=0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+(1-3m)x-2m-2=0 \quad (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

(C_m) cắt (d) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn hoặc bằng 1

$\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng 1

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét phương trình (2); Ta có: $\Delta = (1-3m)^2 + 8m + 8 = 9m^2 + 2m + 9 > 0, \forall m$

$\Rightarrow \forall m$ (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

(1) có 2 nghiệm lớn hơn 1 $\Leftrightarrow 1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$

Đặt t = x - 1 ⇔ x = t + 1⇒ (2) ⇔ $(t+1)^2 + (1-3m)(t+1) - 2m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 3(1-m)t - 5m = 0 \quad (3)$

(2) có 2 nghiệm thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2$ ⇔ (3) có 2 nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3(m-1) > 0 \Leftrightarrow vn \\ p = -5m > 0 \end{cases}$$

Kết luận: không có giá trị m

HT 70. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Viết phương trình đường thẳng cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$

Giải

Với $x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4$ Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(2;4) là:

$y = k(x - x_A) + y_A \Rightarrow d : y = k(x-2) + 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng (d)

$x^3 - 3x + 2 = k(x-2) + 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - k + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 + 2x - k + 1 \end{array} \right.$$

Điều kiện để có BC: $\left[\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$

Khi đó. Tọa độ của $B(x_1;y_1);C(x_2;y_2)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - k + 1 = 0 & (1) \\ y = kx - 2k + 4 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $\begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow \left| x_2 - x_1 \right| = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{k} \\ (2) \Leftrightarrow \left| y_2 - y_1 \right| = \left| k(x_2 - x_1 \right| = 2k\sqrt{k} \end{array}$

Theo giả thiết ta có: BC = $2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4k + 4k^3} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4k^3 + 4k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy: $d : y = x + 2$

HT 71. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$ (C), m là tham số. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm A(0;1), B, C với B, C đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

Giải

Giao của (C) và (d) có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$4x^3 - 6mx^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x(4x^2 - 6mx + 1) = 0$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $4x^2 - 6mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \Delta' = 9m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}; m < \frac{-2}{3}$

Gọi $B(x_1; -x_1 + 1), C(x_2; -x_2 + 1)$ Để B, C đối xứng qua đường phân giác thứ nhất thì:

$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

So sánh điều kiện ta thấy không có giá trị m thỏa mãn.

HT 72. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (m là tham số) (1). Tìm m để đường thẳng $d: y = 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A(0; 1), B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại B và C vuông góc với nhau.

Giải

• PT hoành độ giao điểm của (1) và d: $x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow m < \frac{9}{4}, m \neq 0$

Khi đó: x_B, x_C là các nghiệm của PT: $x^2 + 3x + m = 0 \Rightarrow x_B + x_C = -3; x_B.x_C = m$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_1 = 3x_B^2 + 6x_B + m$ và tại C là $k_2 = 3x_C^2 + 6x_C + m$

Tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \vee m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8}$

HT 73. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = mx + m + 3$. Tìm m để (d) cắt (C) tại M(–1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $x^3 - (m+3)x - m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (y = 3) \\ g(x) = x^2 - x - m - 2 = 0 \end{array}\right.$$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt M(–1; 3), N, P ⇔ $m > -\frac{9}{4},\ m \neq 0$

Khi đó: x_N, x_P là các nghiệm của PT: $x^2 - x - m - 2 = 0 \Rightarrow x_N + x_P = 1; x_N.x_P = -m - 2$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là $k_1 = 3x_N^2 - 3$ và tại P là $k_2 = 3x_P^2 - 3$

Tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau ⇔ $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$

$$m = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{3} \vee m = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{3}$$

HT 74. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C). Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

Giải

• PT đường thẳng (d): $y = k(x-2)$

+ PT hoành độ giao điểm của (C) và (d): $x^3 - 3x^2 + 4 = k(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 = x_A \\ g(x) = x^2 - x - 2 - k = 0 \end{array}\right.$$

+ (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, M, N ⇔ PT $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k \neq 0 \qquad (*)$$

+ Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_M + x_N = 1 \\ x_M x_N = -k - 2 \end{cases}$

+ Các tiếp tuyến tại M và N vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_M).y'(x_N) = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_M^2 - 6x_M)(3x_N^2 - 6x_N) = -1 \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \quad \text{(thoả (*))}$$

HT 75. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ (C). Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d): $y = m(x+1) + 2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm M cố định và xác định các giá trị của m để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

Giải

• PT hoành độ giao điểm $(x+1)(x^2 - x - 2 - m) = 0$ (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 - m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) luôn có 1 nghiệm $x = -1$ ($y = 2$) $\Rightarrow$ (d) luôn cắt (C) tại điểm M(–1; 2).

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt, khác –1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)

Tiếp tuyến tại N, P vuông góc $\Leftrightarrow y'(x_N).y'(x_P) = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ (thoả (*))

HT 76. Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $x = -1$ cắt đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Cách 1: Ta có: $y' = 3x^2 - m \Rightarrow y'_{(-1)} = 1 - m$

Phương tình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x = -1 là:

$y = (3-m)x + m + 1 \Leftrightarrow (3-m)x - y + m + 1 \qquad (d)$

$$d\left[I,(d)\right] = \frac{\left|4-m\right|}{\sqrt{(3-m)^2+1}} = \frac{\left|1+(3-m)\right|}{\sqrt{(3-m)^2+1}} \le \frac{\sqrt{2}\sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}} = \sqrt{2}$$

Tiếp tuyến cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho AB min ⇔ d(I,(d)) max.

Dấu = xảy ra khi m = 2. Khi đó, phương trình tiếp tuyến là x - y + 3 = 0

Cách 2: Phương trình tiếp tuyến tại điểm x = -1 là: y = (3 - m)x + m + 1

⇒ Tiếp tuyến luôn đi qua điểm cố định là M(1;4)

Ta có đường tròn có tâm I(2;3), bán kính R = 2

⇒ IM = $\sqrt{2}$ < R ⇒ M nằm trong đường tròn

Gọi H là hình chiếu của I lên tiếp tuyến. Giả sử tiếp tuyến cắt đường tròn theo dây cung AB

⇒ AB = 2AH = $2\sqrt{R^2 - IH^2}$

⇒ AB min khi IH max. Tức là H trùng với M. Khi đó, tiếp tuyến nhận $\overrightarrow{IM}$ làm véc tơ pháp tuyến

Ta có: $\overrightarrow{IM}$ (-1;1) ⇒ m = 2. Khi đó, phương trình tiếp tuyến là: y = x + 3

HT 77. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 2\left(C_m\right)$. Tìm m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất

Giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Vì $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$ nên đường thẳng Δ đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -2mx + 2$

Ta có $d\left(I,\Delta\right) = \frac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1$ (vì m > 0), chứng tỏ đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1 tại 2 điểm A, B phân biệt

Với $m \neq \frac{1}{2}$, đường thẳng Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \leq \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}$

Nên $S_{\Delta IAB}$ đạt giá trị lớn nhất bằng ½ khi sinAIB = 1 hay tam giác AIB vuông cân tại I

$\Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (H là trung điểm của AB) $\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

HT 78. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ có đồ thị là (C_m) Định m để đồ thị (C_m) cắt trục trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

<u>Giải</u>

• Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành:

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt: t = x^2 (t ≥ 0) ⇒ (1) ⇔ $t^2 - mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m - 1 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

⇔ (1) có 4 nghiệm phân biệt

⇔ 0 < m - 1 ≠ 1 ⇔ $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

HT 79. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D lần lượt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ sao cho tam giác ACK có diện tích bằng 4 biết $K(3;-2)$.

<u>Giải</u>

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành:

$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1) Đặt: $t = x^2$ $(t \geq 0)$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2).

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với $-\dfrac{1}{2} < m \neq 0$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ theo thứ tự $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$ với $t_1 > t_2$

Theo giả thiết: $S_{ACK} = \dfrac{1}{2} AC.d(K;AC)$ (3) với $d(K;AC) = |y_K|$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16$

Theo Viet ta có: $2(m+1) + 2\sqrt{2m+1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1} = 7 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m \geq 0 \\ m^2 - 16m + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

HT 80. Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Giải

- Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2\left(m+1\right)t + 2m + 1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ S = 2\left(m+1\right) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Với (*), gọi $t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của $f(t) = 0$, khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là: $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow m+1+\left|m\right| = 9\left(m+1-\left|m\right|\right) \Leftrightarrow 5\left|m\right| = 4\left(m+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5m = 4m+4\\ -5m = 4m+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 4\\ m = -\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$$

Vậy $m = \left\{4; -\dfrac{4}{9}\right\}$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ ĐS: $m = 3, m = -\dfrac{13}{9}$.

HT 81. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1$:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm 1\\ x^2 = 3m+1 \quad (*)\end{array}\right.$$

Đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0 < 3m+1 < 4\\ 3m+1 \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{3} < m < 1\\ m \neq 0\end{cases}$$

HT 82. Cho hàm số $y = x^4 - (m^2+2)x^2 + m^2 + 1 \qquad (Cm)$. Tìm các giá trị của m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành phần phía trên Ox có diện tích bằng $\dfrac{96}{15}$.

Giải

Có $y = x^4 - (m^2+2)x^2 + m^2 + 1 = (x^2-1)(x^2-m^2-1)$.

Phương trình $y = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-m^2-1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là $\pm 1; \pm\sqrt{m^2+1}$ khi $m \neq 0$.

Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành phần phía trên trục hoành là:

$$S = 2\int_0^1 \left(x^4 - (m^2+2)x^2 + m^2 + 1\right)dx = \frac{20m^2+16}{15} = \frac{96}{15} \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm

HT 83. Cho hàm số y = $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ đồ thị là (C_m). Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục hoành có phần nằm phía trên trục hoành bằng phần nằm phía dưới trục hoành

Hàm số bậc 3 nhận điểm uốn làm tâm đối xứng

$$\Rightarrow \text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Có hai cực trị} \\ \text{Điểm uốn thuộc trục Ox} \end{cases}$$

*Hàm số có cực trị khi phương trình y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt <=> $3x^2-6x+3m=0$ có 2 nghiệm phân biệt <=> $\Delta' = 9(1-m) > 0 \Leftrightarrow m < 1$

*y''=6x-6 = 0 <=> x = 1 => y = 6m + 2 => đồ thị hàm số nhận điểm U(1; 6m+2) làm điểm uốn

Điểm uốn thuộc Ox khi $y_U = 0$ <=> 6m+2 = 0 <=> $m = \frac{-1}{3}$

Vậy $m = \frac{-1}{3}$ là giá trị cần tìm

HT 84. Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

Giải

• Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2\left(m+1\right)t + 2m + 1 = 0$.

(C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3

$\Leftrightarrow f\left(t\right)$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 sao cho: $\left[\begin{array}{l} 0 = t_1 < t_2 < 3 \\ 0 < t_1 < 3 \leq t_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(0) = 2m + 1 = 0 \\ S = 2(m+1) < 3 \end{cases} \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(3) = 4 - 4m \le 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \vee m \ge 1$$

Vậy: $m = -\dfrac{1}{2} \vee m \ge 1$.

HT 85. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ (1), với m là tham số. Chứng minh đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m < 0$.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (1) và trục Ox:

$x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2\ (t \ge 0)$, (1) trở thành : $t^2 - 2m^2t + m^4 + 2m = 0$ (2)

Ta có : $\Delta' = -2m > 0$ và $S = 2m^2 > 0$ với mọi $m > 0$. Nên (2) có nghiệm dương

$\Rightarrow$ (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt.

HT 86. Cho hàm số: $y = x^4 - 5x^2 + 4$. Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

Giải

Gọi $M(m; m^4 - 5m^2 + 4) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M: y = (4m^3 - 10m)(x - m) + m^4 - 5m^2 + 4\ (d)$

Hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình:

$x^4 - 5x^2 + 4 = (4m^3 - 10m)(x - m) + m^4 - 5m^2 + 4\ (d)$

$\Leftrightarrow (x - m)^2(x^2 + 2mx + 3m^2 - 5) = 0\ (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 3m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $m \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2m^2 > 0 \\ 6m^2 - 5 \ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{10}}{2} < m < \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ m \neq \pm\dfrac{\sqrt{30}}{6} \end{cases}$$

HT 87. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C). Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = -x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Giải

• PT hoành độ giao điểm của (C) và d: $\dfrac{2x+1}{x+2} = -x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ f(x) = x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Do (1) có $\Delta = m^2 + 1 > 0$ và $f(-2) = (-2)^2 + (4-m).(-2) + 1 - 2m = -3 \neq 0, \forall m$

nên đường thẳng d luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Ta có: $y_A = m - x_A$; $y_B = m - x_B$ nên $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 2(m^2 + 12)$

Suy ra AB ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $m = 0$. Khi đó: $AB = \sqrt{24}$.

Câu hỏi tương tự đối với hàm số:

a) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ ĐS: m = 2 b) $y = \dfrac{x-1}{2x}$ ĐS: $m = \dfrac{1}{2}$

HT 88. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ (C). Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $I(-1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của đoạn MN.

Giải

• Phương trình đường thẳng $d: y = k\left(x+1\right) + 1$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+1} = kx + k + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow f(x) = kx^2 + 2kx + k + 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = -4k > 0 \\ f(-1) = 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < 0$$

Mặt khác: $x_M + x_N = -2 = 2x_I \Leftrightarrow$ I là trung điểm MN với $\forall k < 0$.

Kết luận: Phương trình đường thẳng cần tìm là $y = kx + k + 1$ với $k < 0$.

HT 89. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+4}{1-x}$ (C). Gọi (d) là đường thẳng qua A(1; 1) và có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN = 3\sqrt{10}$.

• Phương trình đường thẳng $(d): y = k(x-1)+1$.

Bài toán trở thành: Tìm k để hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ phân biệt sao cho $\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = 90$ (a)

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{-x+1} = k(x-1)+1 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases} \text{(I). Ta có: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} kx^2 - (2k-3)x + k + 3 = 0 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases}$$

(I) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $kx^2 - (2k-3)x + k + 3 = 0$ (b) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow k \neq 0, k < \frac{3}{8}.$$

Ta biến đổi (a) trở thành: $(1+k^2)\left(x_2 - x_1\right)^2 = 90 \Leftrightarrow (1+k^2)\left[\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_2x_1\right] = 90$ (c)

Theo định lí Viet cho (b) ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2k-3}{k}, x_1x_2 = \dfrac{k+3}{k}$, thế vào (c) ta có phương trình: $8k^3 + 27k^2 + 8k - 3 = 0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2 + 3k - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow k = -3;\; k = \frac{-3+\sqrt{41}}{16};\; k = \frac{-3-\sqrt{41}}{16}.$$

Kết luận: Vậy có 3 giá trị của k thoả mãn như trên.

HT 90. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$.

Giải

• PT hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-2}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 2 = 0 \;\; (x \ne -1)$ (1)

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B ⇔ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khác –1

$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 > 0$ (2)

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{m+2}{2} \end{cases}$. Gọi $A\left(x_1;2x_1 + m\right)$, $B\left(x_2;2x_2 + m\right)$.

AB² = 5 ⇔ $(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m = 10 \\ & m = -2 \end{aligned}\right.$ (thoả (2))

Vậy: $m = 10;\ m = -2$.

HT 91. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+m}$ (1). Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d): $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Giải

• PT hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-1}{x+m} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -m \\ x^2 + (m+1)x + 2m + 1 = 0 \end{cases}$ (*)

d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B phân biệt ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt khác $-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \ne -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ m \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \ \vee \ m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m \ne -1 \end{cases}$ (**)

Khi đó gọi $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Các giao điểm của d và đồ thị hàm số (1) là $A(x_1;\ x_1 + 2),\ B(x_2;\ x_2 + 2)$.

Suy ra $AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 2(m^2 - 6m - 3)$

Theo giả thiết ta được $2(m^2 - 6m - 3) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 7 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (**) ta được $m = 7$ là giá trị cần tìm.

HT 92. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-2}$ (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 = \dfrac{37}{2}$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là :

$\dfrac{x+2}{2x-2} = x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + (2m-3)x - 2(m+1) = 0, x \neq 1$

Vì $\begin{cases} \Delta_g = 4m^2 + 4m + 25 > 0 \\ g(1) = 3 \neq 0 \end{cases} \forall m \in \mathbb{R}$ nên d cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Gọi $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

Theo định lý Viet ta có : $x_1 + x_2 = -\dfrac{2m-3}{2}; x_1x_2 = -(m+1)$

Ta có : $OA^2 + OB^2 = x_1^2 + (x_1 + m)^2 + x_2^2 + (x_2 + m)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2$

$= 2\left(-\dfrac{2m-3}{2}\right)^2 + 4(m+1) + 2m\left(-\dfrac{2m-3}{2}\right) + 2m^2 = \dfrac{1}{2}(4m^2 + 2m + 17)$

Giả thiết : $OA^2 + OB^2 = \dfrac{37}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(4m^2 + 2m + 17) = \dfrac{37}{2}$

$\Leftrightarrow 2m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$ hoặc $m = 2$

Kết luận : $m = -\dfrac{5}{2} \vee m = 2$

HT 93. Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Với $M(-1;1)$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là : $\frac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (1)

Với điều kiện $x \neq 1$ thì ta có : $(1) \Leftrightarrow x = (mx - m - 1)(1 - x)$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$ (2)

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1. Đặt : $f(x) = mx^2 - 2mx + m + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m^2 - m > 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Khi đó, tọa độ hai điểm $A\left(x_1; mx_1 - m - 1\right); B\left(x_2; mx_2 - m - 1\right)$

Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (2)

Ta có : $MA^2 = (x_1 + 1)^2 + (mx_1 - m - 2)^2$; $MB^2 = (x_2 + 1)^2 + (mx_2 - m - 2)^2$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = (x_1 + 1)^2 + (mx_1 - m - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (mx_2 - m - 2)^2$

$= x_1^2 + 2x_1 + 1 + m^2x_1^2 - 2(m+2) + (m+2)^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1 + m^2x_2^2 - 2(m+2) + (m+2)^2$

$= (m^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - 2m(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2 + 2$

$= (m^2 + 1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 2(x_1 + x_2) - 2m(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2 + 2$

Theo Viet ta có : $x_1 + x_2 = 2 \vee x_1x_2 = \frac{m+1}{m}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 16 - \frac{2}{m} - 2m$

Xét hàm số : $f(m) = 16 - \frac{2}{m} - 2m$ trên $(-\infty; 0)$

Ta được : $\min f(m) = 20$ tại $m = -1$

Kết luận : $m = -1$

HT 94. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}(C)$. Tìm giá trị của m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho : $OA^2 + OB^2 + AB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. (O là gốc tọa độ)

Giải

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình :

$\dfrac{x-2}{x-1} = -x + m; x \neq 1$

$\Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + m - 2 = 0$ (1)

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ g(1) = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Vậy $d \cap (C)$ tại hai điểm phân biệt với $\forall m$

Gọi các giao điểm lần lượt là : $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1)

Ta có : $OA^2 + OB^2 + AB^2 = x_1^2 + (-x_1 + m)^2 + x_2^2 + (-x_2 + m)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$

$= 4(x_1 + x_2)^2 - 12x_1x_2 - 2m(x_1 + x_2) + 2m^2$

$= 4m^2 - 12m + 24 = (2m - 3)^2 + 15 \geq 15 \forall m$

Vậy, $OA^2 + OB^2 + AB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 15 khi $m = \dfrac{3}{2}$

HT 95. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ (C). Gọi d là đường thẳng qua $M(2;0)$ và có hệ số góc là k. Tìm k để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho : $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

Giải

Phương trình đường thẳng $d: y = kx - 2k$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là : $\dfrac{x+1}{x-2} = kx - 2k$ (1)

Với $x \neq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow f(x) = kx^2 - (4k+1)x + 4k - 1 = 0$ (2)

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 12k + 1 > 0 \\ f(2) = -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k > -\dfrac{1}{12} \end{cases} (*)$$

Đặt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (2) và $y_1 = kx_1 - 2k; y_2 = 2x_2 - 2k$

Khi đó : $\overrightarrow{MA} = -2.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = -2(x_2 - 2) \\ y_1 - 2 = -2(y_2 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 6 \ \ (3)$

Theo định lý Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{4k+1}{k} & (4) \\ x_1 x_2 = \dfrac{4k-1}{k} & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) suy ra : $x_1 = \dfrac{2k+2}{k}; x_2 = \dfrac{4k-1}{k}$ (6)

Từ (5) và (6) ta được : $\dfrac{2k+2}{k}.\dfrac{2k-1}{k} = \dfrac{4k-1}{k} \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn (*)

KL : $k = \dfrac{2}{3}$

HT 96. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (H). Tìm m để đường thẳng d :y = 2x + 3m cắt (H) tại hai điểm phân biệt sao cho $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4$ với O là gốc tọa độ.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với (d) :

$$\frac{x+3}{x+2} = 2x + 3m \Rightarrow 2x^2 + 3(1+m)x + 6m - 3 = 0 \quad (1)(x \neq -2)$$

(H) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A và B ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 30m + 33 > 0 \\ 8 - 6(1+m) + 6m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$$

Gọi 2 nghiệm của pt (1) là x_1 ; x_2 thì A(x_1 ;2 x_1 +3m) ; B(x_2 ;2 x_2 +3m)

Có : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4 \Rightarrow x_1 x_2$ +(2 x_1 +3m)(2 x_2 +3m) = - 4 $\Rightarrow \dfrac{12m-15}{2} = -4 \Rightarrow m = \dfrac{7}{12}$

HT 97. Tìm trên (H) : $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ các điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB bằng 4 và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y=x.$

Giải

Do AB ⊥ d : y = x ⇒ pt AB: y = -x + m

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với đường thẳng AB :

$$\frac{-x+1}{x-2}=-x+m \Leftrightarrow g(x)=x^2-(m+3)x+2m+1=0 \quad (x\neq 2) \quad (1)$$

Để tồn tại 2 điểm A, B thì pt (1) cần có hai nghiệm phân biệt $x_A;x_B$ và khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{g(x)}>0\\ g(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)^2-4(2m+1)>0\\ 4-(m+3).2+2m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow (m-1)^2+4>0;\forall m$$

Theo Viets ta có : $\begin{cases}x_A+x_B=m+3\\ x_A.x_B=2m+1\end{cases}$ Mặt khác : $y_A=-x_A+m;y_B=-x_B+m$

$$Maø: AB=4\Leftrightarrow AB^2=16\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=16\Leftrightarrow (x_B+x_A)^2-4x_A.x_B=8$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2-4(2m+1)=0\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=3\end{array}\right.$$

+) Với m = 3 thay vào pt (1) ta có : $x^2-6x+7=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow A(3+\sqrt{2};-\sqrt{2});B(3-\sqrt{2};\sqrt{2})\,hoaëc\,A(3+\sqrt{2};-\sqrt{2});B(3-\sqrt{2};\sqrt{2})$$

+) Với m = -1 thay vào (1) ta có : $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow y=-2\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow A(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2});B(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})\,hoaëc\,A(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2});B(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2})$$

Kết luận: ....

HT 98. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}\,(C)$. Tìm m để đường thẳng $d:2x-y+m=0$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có tung độ dương.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{2x-3}{x+1}=2x+m\Leftrightarrow 2x^2+mx+m+3=0\ (1)$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi: (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m - 24 > 0 \\ 2 - m + m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 + \sqrt{40} \\ m < 4 - \sqrt{40} \end{array}\right.$$

Hai giao điểm có tung độ dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x_1 + m + 2x_2 + m > 0 \\ (2x_1 + m)(2x_2 + m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + m > 0 \\ 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m}{2} + m > 0 \\ 2(m+3) + 2m(-\dfrac{m}{2}) + m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $m > 4 + \sqrt{40}$

HT 99. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ có đồ thị (H). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\widehat{AOB}$ nhọn.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với d :

$$\frac{x+3}{x-2} = -x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m + 5 = 0 \quad (x \neq 2)$$

Để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt thì :

$$\Delta > 0; x \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 16 > 0 \\ 2^2 - 2(m+2) + 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$$

Gọi $A(x_1; -x_1 + m + 1); B(x_2; -x_2 + m + 1)$ là 2 giao điểm của (H) và d

Để $\widehat{AOB}$ nhọn thì $AB^2 < OA^2 + AB^2 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 < (-x_1 + m + 1)^2 + (-x_2 + m + 1)^2$

$$\Leftrightarrow -2x_1x_2 + (m+1)(x_1 + x_2) - (m+1)^2 < 0 \Leftrightarrow m > -3$$

Kết luận : m > -3

HT 100. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$ (C). Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho ABCD là hình bình hành.

Giải

Hoành độ điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$\frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;-1); B(2;2) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

Ta có: C, D thuộc đường thẳng y = x + m và $CD \parallel AB$ nên m $\neq$ 0 và CD = AB = $3\sqrt{2}$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{3x+2}{x+2} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt phải có: $\Delta = m^2 - 10m + 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m<1 \end{array}\right.$

Gọi C(a;a+m); D(b;b+m) với a, b là nghiệm của phương trình (*)

CD = $3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(a-b)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 = 9 \left[\begin{array}{ll} m=0 & (loai) \\ m=10 & (t/m) \end{array}\right.$

KL: m = 10

HT 101. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm m để đường thẳng d: $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

Giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0, \quad x \neq 1$ (*)

(*) có $\Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in R$ và (*) không có nghiệm x = 1.

⇒ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt là x_A, x_B. Theo định lí Viét: $\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A . x_B = 1 - m \end{cases}$

Khi đó: $A(x_A;\ x_A + m),\ B(x_B;\ x_B + m)$

ΔOAB vuông tại O thì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + (x_A + m)(x_B + m) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x_A x_B + m(x_A + x_B) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy: m = –2.

HT 102. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. Chứng minh rằng với mọi giá trị m thì trên (C) luôn có cặp điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) và thỏa $\begin{cases} x_A-y_A+m=0 \\ x_B-y_B+m=0 \end{cases}$.

Giải

• Ta có: $\begin{cases} x_A-y_A+m=0 \\ x_B-y_B+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A=x_A+m \\ y_B=x_B+m \end{cases} \Rightarrow A,B\in(d): y=x+m$

⇒ A, B là giao điểm của (C) và (d). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$x+m=\frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=x^2+(m-3)x-(2m+2)=0\ (x\neq 2) \qquad (*).$$

(*) có $\Delta=m^2+2m+17>0, \forall m \Rightarrow$ (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Và $1.f(2)=-4<0 \Rightarrow x_A<2<x_B$ hoặc $x_B<2<x_A$ (đpcm).

HT 103. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{mx+1}$ (1). Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$ đồ thị hàm số (1) cắt (d) : $y=2x-2m$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc một đường (H) cố định. Đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N. Tìm m để $S_{OAB}=3S_{OMN}$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng d :

$$\frac{2x-m}{mx+1}=2x-2m \Leftrightarrow 2mx^2-2m^2x-m=0\left(x\neq -\frac{1}{m}\right)\ (2)$$

Do $m\neq 0$ nên $(2)\Leftrightarrow f(x)=2mx^2-2mx-1=0\left(x\neq -\frac{1}{m}\right)\ (*)$

Để tồn tại hai điểm A, B thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt $x_A;x_B$ khác $-\dfrac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+2>0 \\ f\left(-\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{2}{m^2}+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\neq 0$$

Mặt khác, ta có : $x_A.x_B = \frac{1}{2}$ nên A, B luôn nằm trên một đường (H) cố định.

Kẻ OH $\perp$ AB$\Rightarrow$ OH$= d_{(O,d)} = \frac{\left|-2m\right|}{\sqrt{5}}$. Lại có A, B $\in$ d $\Rightarrow$

HT 104. Cho hàm số $\frac{2x+1}{x-1}$ (C). Tìm trên hai nhánh của đồ thị điểm M và N sao cho tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại 4 điểm lập thành một hình thang.

Giải

Gọi M, N là 2 điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại hai điểm A, B.

Tiếp tuyến tại N cắt hai tiệm cận tại hai điểm C, D

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng : $f(x) = f'_{(m)}(x-m) + f_{(m)}$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm $A\left(1;\frac{2m+4}{m-1}\right), B\left(2m-1;2\right)$

Tương tự ta có: $C\left(1;\frac{2n+1}{n-1}\right), D\left(2n-1;2\right)$

Phương trình đương thẳng AD: $y = \frac{-3}{(m-1)(n-1)}x + \frac{6(2m+4)(2n-1)}{(2m-2)(n-1)}$

AD có hệ số góc: $k = \frac{-3}{(m-1)(n-1)}$

Tương tự ta cũng có BC có hệ số góc: $k = \frac{-3}{(m-1)(n-1)}$

$\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow$ Mọi điểm M, N thuộc 2 nhánh của đồ thị đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HT 105. Cho hàm số: $y = \frac{mx-4m+3}{x-m}$. Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq 1$, đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định A và B. Từ hai điểm A và B hãy lập phương trình của hai đường thẳng có hệ số góc bằng 1,5. Tính diện tích hình thang giới hạn bởi $AB,$ hai đường thẳng này và trục $Ox.$

Giải

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số

$\Rightarrow$ phương trình: $(x_0+y_0-4)m+3-x_0y_0=0$ đúng với $\forall m\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0+y_0-4=0\\3-x_0y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+y_0-4=0\\x_0^2-4x_0+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=1\\y_\Delta=3\end{cases}\\\begin{cases}x_0=3\\y_0=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy đồ thị có hai điểm cố định là: $A(1;3),B(3;1)$.

Phương trình đường thẳng đi qua A có hệ số góc bằng $\frac{3}{2}$ là $y-3=\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\ (d_1)$

Phương trình đường thẳng qua B có hệ số góc là $\frac{3}{2}$ là:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}\ (d_2)$$

Giao điểm của (d_1) với Ox là $C(-1;0)$, của (d_2) với Ox là $D\left(\frac{7}{3};0\right)$

Khoảng cách giữa $(d_1),(d_2)$ cũng chính là chiều cao của hình thang

$$h=\frac{\left|\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{10}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

Vậy diện tích hình thang phải tìm là: $S=(AC+BD)\frac{h}{2}=\left(\sqrt{13}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right).\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{4}{3}.\sqrt{13}.\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{20}{3}$

HT 106. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}\ (C)$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác IAB đều.

Giải

Đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình sau có

2 nghiệm phân biệt: $\frac{2x-1}{x-1} = -x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + (1-m)x + m - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (1-m)^2 - 4(m-1) > 0 \\ 1+1-m+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < 1 \end{array}\right.$ (*)

Ta có: $I(1;2), x_1 + x_2 = m-1$ & $x_1x_2 = m-1$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ và H là trung điểm của AB.

Khi đó: $y_1 = -x_1 + m; y_2 = -x_2 + m$ và

$H\left(\frac{m-1}{2};\frac{m+1}{2}\right); \overrightarrow{IH} = \left(\frac{m-3}{2};\frac{m-3}{2}\right); \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; x_1 - x_2)$

ΔIAB đều $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IH^2 = \frac{3}{4}AB^2 \end{cases}$ (**)

Ta có: $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[x_1 + x_2 - (m-1)\right] = 0$

Do $x_1 + x_2 = m-1$ nên đẳng thức này đúng với mọi m thỏa mãn (*)

Ta có: (**) $\Leftrightarrow \frac{(m-3)^2}{2} = \frac{3}{2}\left[(x_2 - x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 3\left[(m-1)^2 - 4(m-1)\right]$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{6}$ Các giá trị này thỏa mãn (*)

KL: $m = 3 \pm \sqrt{6}$

HT 107. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C). Tìm các giá trị của m để đường thẳng $y = -x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA, OB bằng 60^0. Với O là gốc tọa độ.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + m = 0$ (1) với $x \neq 1$

Đường thẳng $y = -x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right. \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right. (*)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (¡), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m \\ g(x_1) = g(x_2) = 0 \end{cases} \quad (**)$

Các giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_1; -x_1 + m) \\ \overrightarrow{OB} = (x_2; -x_2 + m) \end{cases}$

Khi đó: $\cos 60^0 = \left|\cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right| = \dfrac{\left|x_1x_2 + (-x_1 + m)(-x_2 + m)\right|}{\sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + m^2}\sqrt{2x_2^2 - 2mx_2 + m^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\left|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2\right|}{\sqrt{2g(x_1) + m^2 - 2m}\sqrt{2g(x_2) + m^2 - 2m}} = \frac{\left|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2\right|}{\sqrt{m^2 - 2m}\sqrt{m^2 - 2m}} = \frac{|2m|}{m^2 - 2m}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 2m = 4m \\ m^2 - 2m = -4m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có: $m = -2 \vee m = 6$

PHẦN 4: TIẾP TUYẾN

HT 108. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1\ (C)$. Chứng minh rằng mỗi tiếp tuyến của (C) chỉ tiếp xúc với (C) tại đúng một điểm.

Giải

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại hai điểm $M(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1)$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến là:

$y = (3x_0^2 - 6x_0)x - 2x_0^3 + 3x_0^2 + 1$ và $y = (3x_1^2 - 6x_1)x - 2x_1^3 + 3x_1^2 + 1$

Hai phương trình trên cùng là phương trình của 1 tiếp tuyến nên:

$$\begin{cases} 3x_0^2 - 6x_0 = 3x_1^2 - 6x_1 \\ -2x_0^3 + 3x_0^2 + 1 = -2x_1^3 + 3x_1^2 + 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x_0 = x_1$ Suy ra điều phải chứng minh.

HT 109. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Giải

• Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ có phương trình:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x + (x_0 - 1)^2 y - 2{x_0}^2 + 2x_0 - 1 = 0 \quad (*)$$

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2 - 2x_0|}{\sqrt{1 + (x_0 - 1)^4}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Các tiếp tuyến cần tìm : $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$

HT 110. Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (1) (m là tham số). Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x + y + 7 = 0$ góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Giải

• Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có VTPT $\vec{n}_1 = (k;-1)$

Đường thẳng d có VTPT $\vec{n}_2 = (1;1)$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{3}{2} \\ k = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

YCBT thoả mãn $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} y' = \dfrac{3}{2} \\ y' = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{3}{2} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \ge 0 \\ \Delta'_2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 - 2m - 1 \ge 0 \\ 4m^2 - m - 3 \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{1}{4}; m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \le -\dfrac{3}{4}; m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{4} \text{ hoặc } m \ge \dfrac{1}{2}$$

HT 111. Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x \ (C)$. Tìm tọa độ các điểm trên trục hoành sao cho qua điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và góc giữa hai tiếp tuyến này bằng 45^0.

Giải

Qua điểm M trên Ox, ta luôn kẻ được tiếp tuyến với (C) là $y = 0$.

Góc của hai tiếp tuyến là 45^0, mà $y = 0$ có hệ số góc là 0 nên hệ số góc của tiếp tuyến d còn lại có hệ số góc bằng -1 hoặc 1.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của d và (C) $\Rightarrow y' = -3x_0^2 + 4x_0 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow d: y = -x \Rightarrow M \equiv O$

Khi $x_0 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow y_0 = -\dfrac{4}{27} \Rightarrow d: y = -\left(x - \dfrac{4}{3}\right) = -x + \dfrac{32}{27} \Rightarrow M\left(\dfrac{32}{27};0\right)$

HT 112. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

Giải

• Giả sử $A(a;a^3 - 3a^2 + 1)$, $B(b;b^3 - 3b^2 + 1)$ thuộc (C), với $a \neq b$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0$$

$\Leftrightarrow a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - a$. Vì $a \neq b$ nên $a \neq 2 - a \Leftrightarrow a \neq 1$

Ta có: AB $= \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - 3b^2 + 1 - a^3 + 3a^2 - 1)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - a^3 - 3(b^2 - a^2))^2}$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + \left[(b-a)^3 + 3ab(b-a) - 3(b-a)(b+a)\right]^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2\left[(b-a)^2 + 3ab - 3.2\right]^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2\left[(b+a)^2 - ab - 6\right]^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2(-2-ab)^2}$$

$$\text{AB}^2 = (b-a)^2\left[1 + (-2-ab)^2\right] = (2-2a)^2\left[1 + (a^2 - 2a - 2)^2\right]$$

$$= 4(a-1)^2\left[1 + \left[(a-1)^2 - 3\right]^2\right] = 4(a-1)^2\left[(a-1)^4 - 6(a-1)^2 + 10\right]$$

$$= 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2$$

Mà $AB = 4\sqrt{2}$ nên $4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2 = 32$

$$\Leftrightarrow (a-1)^6 - 6(a-1)^4 + 10(a-1)^2 - 8 = 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = (a-1)^2$, $t > 0$. Khi đó (*) trở thành:

$$t^3 - 6t^2 + 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow$$

$$(a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow b = -1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right.$$

Vậy 2 điểm thoả mãn YCBT là: $A(3;1)$, $B(-1;-3)$.

HT 113. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

Giải

• Gọi $M(0;y_o)$ là điểm cần tìm. PT đường thẳng qua M có dạng: $y=kx+y_o$ (d)

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=kx+y_o\\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y_o-1)x^2-2(y_o+1)x+y_o+1=0 \ \ (1)\\ x\neq 1;\ \ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ (*)

YCBT ⇔ hệ (*) có 1nghiệm ⇔ (1) có 1 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y_o=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}y_o\neq 1\\ \Delta'=(y_o+1)^2-(y_o-1)(y_o+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2};y_o=1\Rightarrow k=-8\\ x=0;y_o=-1\Rightarrow k=-2\end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm cần tìm là: M(0; 1) và M(0; –1).

HT 114. Cho hàm số $y=3x-x^3$ (C). Tìm trên đường thẳng $d: y=-x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Giải

- Gọi $M(m;-m)\in(d)$.

PT đường thẳng Δ đi qua điểm M và có hệ số góc k có dạng : $y=k(x-m)-m$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ PT sau có nghiệm $\begin{cases}3x-x^3=k(x-m)-m & (1)\\ 3-3x^2=k & (2)\end{cases}$ (*).

Thay (2) và (1) ta được:
$$3x-x^3-(3-3x^2)(x-m)+m=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-3mx^2+4m=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{2x^3}{3x^2-4} \quad (**)$$

Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{2x^3}{3x^2-4}$. Tập xác định : D = $\mathbb{R}\setminus\{\dfrac{2\sqrt{3}}{3};-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\}$

Có: f'(x) = $\dfrac{6x^4-24x^2}{3x^2-4}$; f'(x) = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		0		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	-	‖	-	2	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số

$\Leftrightarrow$ (**) có hai nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: (**) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Các điểm cần tìm là: A(2; −2) và B(−2; 2).

HT 115. Cho hàm số: $y=x^3-3x+2$. Tìm tất cả điểm trên đường thẳng $y=4$, sao cho từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C).

Giải

Gọi M(x_0;4) là điểm cần tìm.

Phương trình đường thẳng (d) qua M với hệ số góc k là: $y=k(x-x_o)+4$

(d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-x_0)+4=x^3-3x+2 & (1) \\ k=3x^2-3 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$(3x^2-3)(x-x_o)+4=x^3-3x+2$$
$$\Leftrightarrow 3x^3-3x^2x_o-3x+3x_o=x^3-3x+2$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2x_o+3x_o-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[2x^2-(3x_0+2)x+3x_0+2\right]=0\ (3)$$

Để kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số khi và chỉ khi (3) có đúng 2 nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x^2 - (3x_0 + 2)x + 3x_0 + 2 = 0$$ có :

+)2 nghiệm trong đó 1 nghiệm bằng-1;

+)Có nghiệm kép khác -1.

Giải tìm đúng 3 điểm: (-1;4);(-2/3;4);(2;4)

HT 116. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C). Tìm trên đường thẳng $d: y = 2$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Giải

- Gọi $M(m;2) \in (d)$.

PT đường thẳng Δ đi qua điểm M và có hệ số góc k có dạng : $y = k(x - m) + 2$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ PT sau có nghiệm $\begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2 = k(x-m) + 2 & (1) \\ -3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ (*).

Thay (2) và (1) ta được: $2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2 - (3m-1)x + 2\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = 2x^2 - (3m-1)x + 2 = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) ⇔ hệ (*) có 3 nghiệm x phân biệt

⇔ (3) có hai nghiệm phân biệt khác 2 ⇔ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hoÆc } m > \dfrac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Vậy từ các điểm M(m; 2) ∈ (d): y = 2 với $\begin{cases} m < -1 \text{ hoÆc } m > \dfrac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

HT 117. Cho hàm số $y = (|x| + 1)^2 . (|x| - 1)^2$ (C). Cho điểm $A(a;0)$. Tìm a để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Giải

- Ta có $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(a;0)$ và có hệ số góc k : $y = k(x - a)$

d là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ phương trình sau có nghiệm: $(I)\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = k(x-a) \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases}$

Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}(A)$ hoặc $\begin{cases} 4x(x^2-1) = k \\ f(x) = 3x^2 - 4ax + 1 = 0 \quad (1) \end{cases}(B)$

+ Từ hệ (A), chỉ cho ta một tiếp tuyến duy nhất là $d_1 : y = 0$.

+ Vậy để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với (C) thì điều kiện cần và đủ là hệ (B) phải có 2 nghiệm phân biệt $(x;k)$ với $x \neq \pm 1$, tức là phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4a^2 - 3 > 0 \\ f(\pm 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq a < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $1 \neq a > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

HT 118. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Giải

Gọi điểm cần tìm là $M(m;2)$.

Nhận xét: đường thẳng $x = m$ đi qua M cắt đường cong và song song với trục tung và nó không thể là tiếp tuyến nên mọi tiếp tuyến qua M đều có dạng: $y = k(x-m) + 2$.

Vậy, hệ sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x-m) + 2 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = (x-m)(3x^2 - 6x) + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - (3m-3)x^2 + 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ 2x^2 - 3(m+1)x + 6m = 0 \ (1) \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $k = 0$ Tiếp tuyến là $y = 2,$ đường thẳng vuông góc với nó có dạng: $x = c.$ Vậy không có tiếp tuyến nào của đường cong vuông góc với tiếp tuyến này.

Vậy, để đường cong có hai tiếp tuyến vuông góc thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho: $y'(x_1).y'(x_2) = -1 \ (2).$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 9 - 48m > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 30m + 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < \dfrac{1}{3} \end{array}\right. (2)$$

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3m+3}{2}; x_1.x_2 = 3m$

Ta có: $3x^2 - 6x = \frac{3}{2}\left[2x^2 - 3(m+1)x + 6m\right] + \frac{3}{2}(3m-1)x - 9m$

$\Rightarrow y'(x_1) = 3x_1^2 - 6x_1 = \frac{3}{2}(3m-1)x_1 - 9m, y'(x_1) = 3x_2^2 - 6x_2 = \frac{3}{2}(3m-1)x_2 - 9m$

$(2) \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \left[\frac{3}{2}(3m-1)x_1 - 9m\right]\left[\frac{3}{2}(3m-1)x_2 - 9m\right] = -1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}(3m-1)^2 x_1x_2 - \frac{27}{2}m(3m-1).(x_1+x_2) + 81m^2 = -1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}(3m-1)^2.3m - \frac{27}{2}m(3m-1).\frac{3m+3}{2} + 81m^2 = -1$

$\Leftrightarrow 27m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{27}$ (thỏa mãn điều kiện (2))

KL: $M\left(2; -\frac{1}{27}\right)$

HT 119. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$.

Giải

- (d) có hệ số góc $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có đúng một nghiệm âm.

+ Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

+ Nếu $m \neq 0$ thì dễ thấy phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = 1$ hay x=$\frac{2-3m}{m}$

Do đó để (1) có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy $m<0$ hay $m>\frac{2}{3}$.

HT 120. Tìm tất cả các giá trị m sao cho trên đồ thị $(C_m): y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4m-3)x+1$ tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (L): $x+2y-3=0$

Giải

Cách 1: Có y' = $mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y'.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4m^2-4m+1>0 \\ \frac{m-1}{m}>0 \\ \frac{2-3m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \frac{1}{2} \\ 0<m<1 \\ 0<m<\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}<m<\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ là các giá trị cần tìm

Cách 2: Có $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y'.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

+) TH1: m = 0 từ (1) ta có: x = -1 (loại)

+) TH2: $m=\frac{1}{2}$ từ (1) ta có x = ± 1(loại)

+) Th3: $m \neq 0; m \neq \frac{1}{2}$ Từ pt (1) có 2 nghiệm $x = 1 \vee x = \frac{2-3m}{m}$

Điều kiện bài toán $\Rightarrow \frac{2-3m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{2}{3}$

Kết hợp cả 3 trường hợp trên ta có giá trị của m cần tìm là: $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$

HT 121. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$. Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là a và b. Tìm điều kiện đối với a và b để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Giải

• Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A và B là $k_A = f'(a) = 4a^3 - 4a,\ k_B = f'(b) = 4b^3 - 4b$

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có phương trình là:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = f'(a)x + f(a) - \text{a}f'(a)$$

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) \Leftrightarrow y = f'(b)x + f(b) - \text{b}f'(b)$$

Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi:

$$k_A = k_B \Leftrightarrow 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-1) = 0 \quad (1)$$

Vì A và B phân biệt nên $a \neq b$, do đó (1) $\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - 1 = 0$ (2)

Mặt khác hai tiếp tuyến của (C) tại A và B trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b) \end{cases} (a \neq b) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ -3a^4+2a^2 = -3b^4+2b^2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $(a;b) = (-1;1)$ hoặc $(a;b) = (1;-1)$, hai nghiệm này tương ứng với cùng một cặp điểm trên đồ thị là $(-1;-1)$ và $(1;-1)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau là:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ a \neq \pm 1;\ a \neq b \end{cases}$$

HT 122. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Giải

• Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a \neq -2$ thuộc (C) có phương trình:

$$y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow 4x - (a+2)^2 y + 2a^2 = 0$$

Tâm đối xứng của (C) là $I\left(-2;2\right)$. Ta có:

$$d(I,d) = \frac{8\left|a+2\right|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \leq \frac{8\left|a+2\right|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}} = \frac{8\left|a+2\right|}{2\sqrt{2}\left|a+2\right|} = 2\sqrt{2}$$

$d(I,d)$ lớn nhất khi $(a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -4 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y = x$ và $y = x + 8$.

HT 123. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Giải

• Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} < 0$

ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y = -x$ (vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là: $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$

+ Với $x_0 = -1;\ y_0 = 1 \Rightarrow$ Δ: $y - 1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$ (loại)

+ Với $x_0 = -2;\ y_0 = 0 \Rightarrow \Delta$: $y - 0 = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x - 2$.

HT 124. Cho hàm số y = $\dfrac{2x-1}{x-1}$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn OA = 4OB.

Giải

• Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1\ \ (y_0 = \dfrac{3}{2}) \\ x_0 = 3\ \ (y_0 = \dfrac{5}{2}) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

HT 125. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B mà tam giác OAB thỏa mãn: $AB = OA\sqrt{2}$

Giải

Cách 1: Gọi $M(x_o;y_o)$, $(x_o \neq 2)$ thuộc đồ thị hàm số. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$y - \frac{2x_o}{x_o - 2} = \frac{-4}{(x_o-2)^2}(x - x_o)$$

Do tam giác cắt trục Ox, Oy tại các điểm A, B và tam giác OAB có $AB = OA\sqrt{2}$ nên tam giác OAB vuông cân tại O. Lúc đố tiếp tuyến d vuông góc với một trong 2 đường phân giác y = x hoặc y = -x

+ TH1: d vuông góc với đường phân giác y = x

Có: $\frac{-4}{(x_o-2)^2}=-1\Leftrightarrow (x_o-2)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=2\Rightarrow pt\,d: y=-x(loai)\\ x_o=4\Rightarrow pt\,d: y=-x+8\end{array}\right.$

+ TH2: d vuông góc với đường phân giác y = -x

Có: $\frac{-4}{(x_o-2)^2}(-1)=-1\Leftrightarrow ptvn$

Kết luận: Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán d: y= -x + 8

Cách 2:

Nhận xét tam giác AOB vuông tại O nên ta có: sin(ABO) = $\frac{OA}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$ nên tam giác AOB vuông cân tại O, phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_o;y_o)$ có dạng:

$$y=\frac{-4}{(x_o-2)^2}(x-x_o)+\frac{2x_o}{x_o-2}$$

Dễ dàng tính được: $A=\left(\frac{x_o^2}{2};0\right);B\left(0;\frac{2x_o^2}{(x_o-2)^2}\right)\Leftrightarrow x_o^3(x_o-4)=0$

+) Với x_o **= 0** ta có phương trình tiếp tuyến là: y = -x (loại)

+) Với x_o **= 4** ta có phương trình tiếp tuyến là: y = -x + 8

HT 126. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

- Lấy điểm $M\left(m;\,2+\frac{1}{m-2}\right)\in\left(C\right)$. Ta có: $y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2 = 4\left[(m-2)^2 + \dfrac{1}{(m-2)^2}\right] \ge 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$

HT 127. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$. Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giải

• Giả sử $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right), \quad x_0 \ne 2$, $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y = \dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2; \dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B(2x_0-2; 2)$

Ta thấy $\dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{2+2x_0-2}{2} = x_0 = x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

S = $\pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\dfrac{2x_0-3}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right] \ge 2\pi$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3)

HT 128. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - m + 1\ (C_m)$. Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Giải

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - m + 1$ tiếp xúc với trục hoành

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2mx^2 + m^2x - m + 1 = 0 \\ 3x^2 - 4mx + m^2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2mx^2 + m^2x - m + 1 = 0 \, (1) \\ \left[\begin{array}{l} x = m \\ 3x = m \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $x = m$ thế vào (1) ta được: $m = 1$

Với $x = 3m$ thế vào (1) ta được:

$$x^3 - 6x^3 + 9x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow m = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận: $m = 1 \vee m = -3 \vee m = \dfrac{3}{2}$

HT 129. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

• Giao điểm của 2 tiệm cận là $I(1;2)$. Gọi M$\left(x_0; 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1}\right) \in$ (C).

+ PTTT tại M có dạng: $y = \dfrac{-3}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1}$

+ Toạ độ các giao điểm của tiếp tuyến với 2 tiệm cận: A$\left(1; 2 + \dfrac{6}{x_0 - 1}\right)$, B$(2x_0 - 1; 2)$

+ Ta có: $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{|x_0 - 1|} \cdot 2|x_0 - 1| = 2.3 = 6$ (đvdt)

+ ΔIAB vuông có diện tích không đổi ⇒ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi IA= IB

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\left|x_0-1\right|} = 2\left|x_0-1\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1+\sqrt{3} \\ x_0 = 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

Khi đó chu vi ΔAIB = $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Chú ý: Với 2 số dương a, b thoả ab = S (không đổi) thì biểu thức P = $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b.

Thật vậy: P = $a+b+\sqrt{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab} = (2+\sqrt{2})\sqrt{ab} = (2+\sqrt{2})\sqrt{S}$.

Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b.

HT 130. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Cho điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

Giải

• Phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;a)$ và có hệ số góc k: $y = kx+a$

d là tiếp tuyến của (C) ⇔ Hệ PT $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx+a \\ k = \frac{-3}{(x-1)^2} \end{cases}$ có nghiệm

⇔ PT: $(1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)=0$ (1) có nghiệm $x \neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' = 3a+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó ta có: $x_1+x_2 = \frac{2(a+2)}{a-1}$; $x_1x_2 = \frac{a+2}{a-1}$ và $y_1 = 1+\frac{3}{x_1-1}$; $y_2 = 1+\frac{3}{x_2-1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì $y_1.y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x_1-1}\right).\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{cases}$.

HT 131. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. Cho điểm $M_o(x_o;y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_0 là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải

- $M_o(x_o;y_o) \in$ (C) $\Rightarrow y_0=1+\dfrac{4}{x_0-1}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M_0 : $y-y_0=-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$

Giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A(2x_0-1;1)$, $B(1;2y_0-1)$.

$\Rightarrow \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_0;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=y_0 \Rightarrow M_0$ là trung điểm AB.

HT 132. Cho hàm số : $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Giải

- Giả sử $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right) \in$ (C).

PTTT (d) của (C) tại M: $y=y'(a).(x-a)+\dfrac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{(a-1)^2}x+\dfrac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1;\dfrac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1;1)$.

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA=\dfrac{6}{|a-1|}$; $\overrightarrow{IB}=(2a-2;0) \Rightarrow IB=2|a-1|$

Diện tích ΔIAB : $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB = 6$ (đvdt) $\Rightarrow$ ĐPCM.

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ ĐS: S = 12.

HT 133. Cho hàm số y = $\frac{x+2}{x+1}$. Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). d là khoảng cách từ I đến Δ. Tìm giá trị lớn nhất của d.

Giải

• $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$. Giao điểm của hai đường tiệm cận là I(–1; 1). Giả sử $M\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0+1}\right) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thi hàm số tại M là:

$$y = \frac{-1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow x + \left(x_0+1\right)^2 y - x_0 - \left(x_0+1\right)\left(x_0+2\right) = 0$$

Khoảng cách từ I đến Δ là d = $\frac{2\left|x_0+1\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+1\right)^4}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2} + \left(x_0+1\right)^2}} \le \sqrt{2}$

Vậy GTLN của d bằng $\sqrt{2}$ khi $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -2$.

HT 134. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm A(2; 4), B(–4; –2).

Giải

• Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ($x_0 \neq -1$).

PTTT (d) là $y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1} \Leftrightarrow x - (x_0+1)^2 y + 2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0$

Ta có: $d(A,d) = d(B,d) \Leftrightarrow \left|2 - 4(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right| = \left|-4 + 2(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right|$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = 0 \vee x_0 = -2$$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ y=x+1;\ y=x+5$

HT 135. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{1-x}$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, A là điểm trên (C) có hoành độ là a. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q. Chứng tỏ rằng A là trung điểm của PQ và tính diện tích tam giác IPQ.

Giải

• $I(1;-2),\ A\left(a;\frac{2a-1}{1-a}\right)$. PT tiếp tuyến d tại A: $y=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{1-a}$

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến d: $P\left(1;\frac{2a}{1-a}\right)$

Giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến d: $Q(2a-1;-2)$

Ta có: $x_P+\ x_Q=2a=2x_A$. Vậy A là trung điểm của PQ.

IP = $\left|\frac{2a}{1-a}+2\right|=\frac{2}{|1-a|}$; IQ = $|2(a-1)|$

S_{IPQ} = $\frac{1}{2}$IP.IQ = 2 (đvdt)

HT 136. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

Giải

• I(2; 2). Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C)$, $x_0\neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Do $\cos\widehat{ABI}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ nên $\tan\widehat{ABI}=\frac{1}{4}=\frac{IA}{IB}\Leftrightarrow IB^2=16.IA^2\Leftrightarrow(x_0-2)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=4\end{array}\right.$

Kết luận: Tại $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

Tại $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

HT 137. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm M $\in$(C) mà tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $y=2m-1$

Giải

Gọi $M(x_o;y_o)$ là tọa độ tiếp điểm

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o;y_o)$ là $y=-\frac{3}{(2x_o-1)^2}(x-x_o)+y_o$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành, trục tung tương ứng

Nên ta có: $y_B=\frac{2x_o^2+4x_o-1}{(2x_o-1)^2}$ và trọng tâm G của tam giác OAB có $y_G=\frac{2x_o^2+4x_o-1}{3(2x_o-1)^2}$

Theo giả thiết trọng tâm nằm trên đường thẳng y = 2m + 1 nên $\frac{2x_o^2+4x_o-1}{3(2x_o-1)^2}=2m-1$

Ta lại có: $\frac{2x_o^2+4x_o-1}{3(2x_o-1)^2}=\frac{6x_o^2-(2x_o-1)^2}{(2x_o-1)^2}=\frac{6x_o^2}{(2x_o-1)}-1\geq-1$

Vậy, tồn tại ít nhất một điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán 2m - 1≥ $-\frac{1}{3}\Rightarrow m\geq\frac{1}{3}$

HT 138. Cho hàm số $y=x^3+3x-10\ (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của đồ thị hàm số (C) với Parabol $(P):y=x^2-5x+6$.

Giải

Gọi $y=ax+b$ là tiếp tuyến chung. Gọi x_1,x_2 là hai tiếp điểm ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + b = x_1^2 - 5x_1 + 6 & (1) \\ a = 2x_1 - 5 & (2) \\ ax_2 + b = x_2^3 + 3x_2 - 10 & (3) \\ a = 3x_2^2 + 3 & (4) \end{cases}$$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow 2x_1 - 5 = 3x_2^2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{3x_2^2 + 8}{2}$ (5)

Từ (1), (2) $\Rightarrow x_1^2 - 5x_1 + 6 = x_1(2x_1 - 5) + b \Rightarrow b = 6 - x_1^2$ (6)

Thay (5), (6) vào (2), (3)

$$\left(3x_{22}^2 + 3\right).x_2 + 6 - \left(\frac{3x_2^2 + 8}{2}\right)^2 = x_2^3 + 3x_2 - 10 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}x_2^4 + 2x_2^3 - 12x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x_2^2(9x_2^2 - 8x_2 + 48) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 9x_2^2 - 8x_2 + 48 = 0\ (vn) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 3x - 10$ là phương trình tiếp tuyến chung cần tìm

HT 139. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = mx + 5$.

Giải

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm A, suy ra phương trình tiếp tuyến tại A là:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = y'(x_0)x_0 + y(x_0)$.

Tức là ta có: $m = y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2}$ và $-y'(x_0)x_0 + y(x_0) = 4$

Từ đó ta có: $\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2}x_0 + \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} = 5 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 8x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0 = \dfrac{2}{3}$

KL: $m = -1$ hoặc $m = -9$

HT 140. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ (C). Tìm m để đường thẳng $y = mx - m$ tiếp xúc với đồ thị (C).

Giải

Đường thẳng $y = mx - m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 5 = mx - m \\ 4x^3 - 12x = m \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^3 + x^2 - 5x - 5 = m \end{array}\right. \\ 4x^3 - 12x = m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow m = 8 \\ \begin{cases} x^3 + x^2 - 5x - 5 = m \\ 4x^3 - 12x = m \end{cases} \quad (I) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I): $\begin{cases} x^3 + x^2 - 5x - 5 = m \\ 4x^3 - 12x = m \end{cases}$

Ta có: $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 4x^3 - 12x \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow m = -8 \\ x = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow m = \dfrac{40}{27} \end{cases}$$

KL: $\left[\begin{array}{l} m = -8 \\ m = \dfrac{40}{27} \end{array}\right.$

PHẦN 5: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

HT 141. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

• PT $x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 + 1 = -m^3 + 3m^2 + 1$. Đặt $k = -m^3 + 3m^2 + 1$

Số nghiệm của PT bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d: $y = k$

Dựa vào đồ thị (C) ta có PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < k < 5 \Leftrightarrow m \in (-1;3) \setminus \{0;2\}$

HT 142. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để phương trình $| x^4 - 5x^2 + 4 |= \log_2 m$ có 6 nghiệm.

• Dựa vào đồ thị ta có PT có 6 nghiệm $\Leftrightarrow \log_{12} m = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m = 12^{\frac{9}{4}} = 144\sqrt[4]{12}$.

HT 143. Cho hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0$ (m > 0)

• $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = -\log_2 m$ (*)

+ Số nghiệm của (*) là số giao điểm của 2 đồ thị $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và $y = -\log_2 m$

+ Từ đồ thị suy ra:

$0 < m < \frac{1}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
2 nghiệm	**3 nghiệm**	**4 nghiệm**	**2 nghiệm**	**vô nghiệm**

HT 144. Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0 \text{ với } x \in [0;\pi]$$

• Xét phương trình: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$ (1)

Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) trở thành: $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ (2)

Vì $x \in [0;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)

Gọi (C_1): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1;1]$ và (d): $y = 1 - m$. Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (d).

Chú ý rằng (C_1) giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \le x \le 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 1$	$1 \le m < \frac{81}{32}$	$m = \frac{81}{32}$	$m > \frac{81}{32}$
vô nghiệm	**1 nghiệm**	**2 nghiệm**	**4 nghiệm**	**2 nghiệm**	**vô nghiệm**

HT 145. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$$

• Xét phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$ (*)

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) \quad \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 2m(2 - \sin^2 2x) \quad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 2x$. Với $x \in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì $t \in [0;1]$. Khi đó (1) trở thành:

$2m = \dfrac{3t-4}{t-2}$ với $t \in [0;1]$

Nhận xét : với mỗi $t \in [0;1]$ ta có : $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -\sqrt{t} \\ \sin 2x = \sqrt{t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{t}$

Để (*) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì $\sqrt{t} \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right) \Rightarrow t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right)$

Dựa vào đồ thị (C) ta có: $y(1) < 2m \le y\left(\dfrac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 1 < 2m \le \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m \le \dfrac{7}{10}$.

HT 146. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$.

• Số nghiệm của $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$ bằng số giao điểm của đồ thị (C′): $y = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ và $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra được:

$m < -1; m > 1$	$m = -1$	$-1 < m \le 1$

PHẦN 6: ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

HT 147. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm M(−1; 3).

Giải

• Gọi $A\left(x_0;y_0\right)$, B là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1;3)\Rightarrow B\left(-2-x_0;6-y_0\right)$

$$A,B\in(C)\ \Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-x_0^3+3x_0+2\\6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-\left(-2-x_0\right)^3+3\left(-2-x_0\right)+2\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0+6=0$$

$$\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(-1;0\right)$ và $\left(-1;6\right)$

HT 148. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C). Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d:2x-y+2=0$.

Giải

• Gọi $M\left(x_1;y_1\right);N\left(x_2;y_2\right)$ thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d

I là trung điểm của AB nên $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, ta có $I\in d$

Có: $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\left(-x_1^3+3x_1+2\right)+\left(-x_2^3+3x_2+2\right)}{2}=2.\dfrac{x_1+x_2}{2}+2$

$$\Rightarrow-\left(x_1+x_2\right)^3+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3\left(x_1+x_2\right)=2\left(x_1+x_2\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\end{array}\right.$$

Lại có: $MN\perp d\Rightarrow\left(x_2-x_1\right).1+\left(y_2-y_1\right).2=0$

$$\Rightarrow 7\left(x_2-x_1\right)-2\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2}$$

- Xét $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}; x_2 = \mp\sqrt{\frac{7}{2}}$

- Xét $\begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = \frac{9}{4} \\ x_1x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; 2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; 2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

HT 149. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

Giải

• Hai điểm $M(x_1; y_1),\ N(x_2; y_2) \in (C)$ đối xứng nhau qua Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ -\frac{x_1^3}{3} + x_1^2 + 3x_1 - \frac{11}{3} = -\frac{x_2^3}{3} + x_2^3 + 3x_2 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3; \frac{16}{3}\right),\ N\left(-3; \frac{16}{3}\right)$.

HT 150. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng –9.

Giải

• Giao điểm 2 tiệm cận là $I(-1; 2)$.

Gọi $M\left(x_0; 2 - \frac{3}{x_0 + 1}\right) \in (C) \Rightarrow k_{IM} = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0 + 1)^2}$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M = y'(x_0) = \frac{3}{\left(x_0 + 1\right)^2}$

+ YCBT $\Leftrightarrow k_M.k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; –3) và M(–2; 5)

HT 151. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Giải

• Gọi $M(x_0;y_0) \in$ (C), ($x_0 \neq -1$) thì $y_0 = \dfrac{2x_0+1}{x_0+1} = 2 - \dfrac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCĐ và TCN thì:

$$MA = |x_0+1|,\ MB = |y_0 - 2| = \left|\frac{1}{x_0+1}\right|$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $MA + MB \geq 2\sqrt{MA.MB} = 2\sqrt{|x_0+1|.\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|} = 2$

$\Rightarrow$ MA + MB nhỏ nhất bằng 2 khi $|x_0+1| = \dfrac{1}{|x_0+1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0; 1) và (–2; 3).

Câu hỏi tương tự:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ĐS: $x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$

HT 152. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C). Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

Giải

• Gọi $M(x;y) \in$ (C) và cách đều 2 tiệm cận x = 2 và y = 3.

Ta có: $|x-2| = |y-3| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\dfrac{3x-4}{x-2} - 2\right| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\dfrac{x}{x-2}\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2} = \pm(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : M_1(1; 1) và M_2(4; 6)

HT 153. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1\ (C)$. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.

Giải

Đồ thị (C) cắt Oy tại $A(0;1)$, nên tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ bằng 1. Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu: $\left(-1;\frac{3}{4}\right);\left(1;\frac{3}{4}\right)$ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên ta chỉ cần xét $M(x_0;y_0) \in (C)$ và $0 \le x_0 \le 1$

Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là:

$$\left|x_0\right| + \left|y_0\right| = x_0 + y_0 = x_0 + \frac{1}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 1 = \frac{1}{4}x_0^4 + \frac{1}{2}x_0(2 - x_0) + 1 \ge 1$$

Với mọi $x_0 : 0 \le x_0 \le 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$. Vậy điểm $M(0;1)$

HT 154. Cho hàm số $y_0 = 2x_0^4 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(\Delta) = 2x - 1$.Tìm trên đồ thị (C) điểm A có khoảng cách đến (Δ) là nhỏ nhất

Giải

Giả sử $A(x_0, y_0) \in (C)$,ta có: $y_0 = 2x_0^4 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1$

Khoảng cách từ A đến (Δ) là :

$$d(A,\Delta) = \frac{|\,2x_0^4 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1 - 2x_0 + 1\,|}{\sqrt{5}} = \frac{|\,2x_0^4 - 3x_0^2 + 2\,|}{\sqrt{5}} = \frac{2x_0^4 - 3x_0^2 + 2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x_0^4 - 2x_0^2\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(x_0^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] \ge \frac{7}{8\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ Mind= $\frac{7}{8\sqrt{5}}$ khi $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy có hai điểm cần tìm: $A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{8} - \sqrt{3}\right)$;$A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{8} + \sqrt{3}\right)$

HT 155. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $M(x_0;y_0) \in (C)$; $d = |x_0| + |y_0|$

Ta có : $M\left(0;-\frac{1}{2}\right) \in (C)$ và $d_M = \frac{1}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có:

i) $|x_0| > \frac{1}{2}$ thì $d > \frac{1}{2}$

ii) $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ thì $y_0 < -\frac{1}{2} \Rightarrow d > \frac{1}{2}$

$$d = -x_0 - y_0 = -x_0 - \frac{x_0 + 1}{x_0 - 2} = \frac{-x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2}$$

Tìm GTNN của y $= \frac{-x^2 + x - 1}{x - 2}$ trên $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

Ta có: $y' = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \Rightarrow$ y giảm trên $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

Vậy miny= $y(0) = \frac{1}{2}$ và điểm M cần tìm là $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

HT 156. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(–3; 0) và N(–1; –1).

Giải

- $\overrightarrow{MN} = (2;-1) \Rightarrow$ Phương trình MN: $x + 2y + 3 = 0$.

Phương trình đường thẳng (d) ⊥ MN có dạng: $y = 2x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x-4}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 4 = 0 \quad (x \neq -1) \qquad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B ⇔ $\Delta = m^2 - 8m - 32 > 0$ (2)

Khi đó $A(x_1;2x_1 + m)$, $B(x_2;2x_2 + m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$ (theo định lý Vi-et)

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow$ I $\in$ MN $\Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ A(0; –4), B(2; 0).

HT 157. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với A(2; 0).

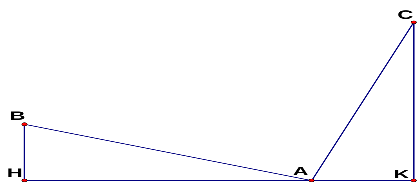
Giải

• Ta có $(C): y=2+\dfrac{2}{x-1}$. Gọi $B\left(b;2+\dfrac{2}{b-1}\right)$, $C\left(c;2+\dfrac{2}{c-1}\right)$ với $b<1<c$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ox.

Ta có: $AB=AC;\ \widehat{BAC}=90^0 \Rightarrow \widehat{CAK}+\widehat{BAH}=90^0=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

và:



$\widehat{BHA}=\widehat{CKA}=90^0 \Rightarrow \Delta ABH=\Delta CAK \Rightarrow \begin{cases} AH=CK \\ HB=AK \end{cases}$

Hay: $\begin{cases} 2-b=2+\dfrac{2}{c-1} \\ \left|2+\dfrac{2}{b-1}\right|=|c-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=3 \end{cases}$.

Vậy $B(-1;1),\ \ C(3;3)$

HT 158. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Tìm tọa độ điểm M $\in$ (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

Giải

• Giả sử $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$. PTTT Δ của (C) tại M là:

$$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)\Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến Δ là:

$$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+\left(x_0+1\right)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo BĐT Cô–si: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6\Rightarrow d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

HT 159. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$. Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2; 0) và B(0; 2).

Giải

• PT đường trung trực đọan AB: $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của PT:

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Hai điểm cần tìm là: $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

HT 160. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

Giải

• Tập xác định D = $R\setminus\{-1\}$. Tiệm cận đứng $x=-1$.

Giả sử $A\left(-1-a;1+\dfrac{4}{a}\right)$, $B\left(-1+b;1-\dfrac{4}{b}\right)$ (với $a>0,b>0$) là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C)

$$AB^2=(a+b)^2+16\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]\ge 4ab\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]=4ab+\frac{64}{ab}\ge 32$$

AB nhỏ nhất ⇔ $AB=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\4ab=\dfrac{16}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a^4=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt[4]{4}$

Khi đó: $A\left(-1-\sqrt[4]{4};1+\sqrt[4]{64}\right),B\left(-1+\sqrt[4]{4};1-\sqrt[4]{64}\right)$.

HT 161. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ Tìm tọa độ hai điểm P. Q thuộc (C) sao cho đường thẳng PQ song song với trục hoành và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8

Giải

Phương trình đường thẳng PQ có dạng: y = m (m ≥ 0)

Vì điểm cực đại A(0;1) cách PQ một khoảng bằng 8 nên m = 9

Khi đó, hoành độ P, Q là nghiệm của phương trình: $x^4-2x^2-8=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Vậy, P(-2;9), Q(2;9) hoặc P(2;9); Q(-2;9)

HT 162. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+\dfrac{5}{3}$ (C). Gọi A và B là giao điểm của (C) và trục Ox. Chứng minh rằng, trên đồ thị tồn tại hai điểm cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+\dfrac{5}{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$ ⇒ A(-5;0) và B(1;0)

Gọi M thuộc (C) ⇒ $M\left(a;\dfrac{1}{3}a^3+a^2-3a+\dfrac{5}{3}\right)$ khác A, B

$\overrightarrow{AM}\left(a+5;\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+\frac{5}{3}\right);\overrightarrow{BM}\left(a-1;\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+\frac{5}{3}\right)$

Theo giả thiết: $AM \perp BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (a+5)(a-1)+\left[\frac{1}{3}(a-1)^2(a+5)^2\right]=0$

Do M khác A, B nên a khác -5 và a khác 1 nên phương trình tương đương:

$1+\frac{1}{9}(a-1)^3(a+5)=0\, hay\, a^4+2a^3-12a^2+14a+4=0$ (*)

Đặt: $y=a^4+2a^3-12a^2+14a+4$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$y'=4a^3+6a^2-12a+14; y'=0$ có 1 nghiệm thực $a_o \approx -\frac{7}{2} \Rightarrow y_o \approx \frac{-2043}{16}$

a	$-\infty$		a_o		1		$+\infty$
y'		-		+		+	
y		↘	$y_o<0$	↗	9	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: (*) luôn có hai nghiệm khác 1 và -5

Vậy luôn tồn tại 2 điểm cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông

HT 163. Cho hàm số $y=\frac{mx+8}{3x+m}$. Chứng minh rằng mọi điểm không nằm trên đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng luôn có duy nhất một đồ thị của hàm số đi qua.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)\notin d; y=x \Leftrightarrow x_0 \neq y_0$

Điều kiện để đồ thị hàm số đi qua $M(x_0;y_0)$ là phương trình sau có nghiệm :

$y_0=\frac{mx_0+8}{3x_0+m} \Leftrightarrow 3x_0y_0+y_0m=x_0m+8$

$\Leftrightarrow (x_0 - y_0)m = 3x_0y_0 - 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{3x_0y_0 - 8}{x_0 - y_0}$ (*)

Nhìn vào biểu thức (*) ta thấy, ứng với mỗi cặp điểm $\left(x_0; y_0\right)$ ta luôn có 1 giá trị của m duy nhất tương ứng. Suy ra điều phải chứng minh.

HT 164. Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$. Tìm các điểm thuộc đường thẳng $x = 1$ mà không có đồ thị đi qua.

Giải

Gọi điểm $M(1;a)$ là điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì không có đồ thị nào đi qua điểm $M(1;a) \Rightarrow$ Phương trình : $a = \dfrac{3m + 1 - m^2 + m}{1 + m}$ (1) không có nghiệm m.

Với điều kiện $m \ne -1$ ta có $(1) \Leftrightarrow m^2 + (a-4)m + a - 1 = 0$ (2)

Để (1) vô nghiệm thì phương trình (2) xảy ra 1 trong hai trường hợp :

- (2) vô nghiệm
- (2) có nghiệm kép $m_{1,2} = -1$

Trường hợp 1 : (2) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 - 4(a-1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < a < 10$

Trường hợp 2 : (2) có nghiệm kép bằng -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{4-a}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow vn \\ a = 6 \end{cases}$$

Kết luận : Như vậy tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $x = 1$ có tung độ bằng a với a thỏa mãn : $2 < a < 10$

HT 165. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$. Chứng minh rằng mỗi điểm thuộc đường thẳng $y = 1$ luôn có duy nhất một đồ thị của hàm số đi qua.

Giải

Gọi $A(a;1) \in d : y = 1$

Đồ thị hàm số qua A $\Leftrightarrow a^4 - 2ma^2 + m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow a^4 - 2ma^2 + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow (m - a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = a^2 (*)$

Dựa vào (*) ta có, ứng với mỗi giá trị của a ta luôn có 1 giá trị m tương ứng.

Suy ra, mỗi điểm trên $y = 1$ luôn có duy nhất 1 giá trị m để đồ thị hàm số đi qua.

Suy ra điều phải chứng minh.

HT 166. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 2m.$ Chứng minh rằng với mọi m thì đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định duy nhất.

Giải

Giả sử $A(a;b)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow b = a^3 - 3ma + 2m$

$\Leftrightarrow m(-3a + 2) + a^3 - b = 0 \ (1)$

Đề đồ thị hàm số luôn qua A với mọi m thì phương trình (1) có nghiệm với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2 = 0 \\ a^3 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{8}{27} \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định duy nhất : $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{27}\right)$. Suy ra điều phải chứng minh.

HT 167. Cho hàm số $y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (m + 3)x - 2m + 1.$ Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

Giải

Xét họ đường cong: $y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (m + 3)x - 2m + 1.$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm. Khi đó ta có:

$y_0 = (m + 2)x_0^3 + 2(m + 2)x_0^2 - (m + 3)x_0 - 2m + 1 \ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 - 2)m + (2x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 + 1 - y_0) = 0 \ \ \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 - 2 = 0 & (1) \\ 2x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 + 1 - y_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x_0 + 2)(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 7 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 6 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4 \end{array}\right.$$

Vậy ta được 3 điểm cố định là: $A(-2;7), B(-1;6), C(1;4)$

$\overrightarrow{AB} = (1;-1), \overrightarrow{AC} = (3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

Suy ra A, B, C thẳng hàng.

HT 168. Cho hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x - m + 1$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

<u>Giải</u>

Xét họ đường cong: $y = (m+1)x^3 - (2m-1)x - m + 1$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm. Tương tự bài trước ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0^3 - 2x_0 - 1 = 0 & (1) \\ y_0 - x_0^3 + x_0 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow y_0 = \left(x_0^3 - 2x_0 - 1\right) + x_0 + 2 = x_0 + 2$

$(1) \Leftrightarrow (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 - 1) = 0 \Rightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Nên 3 điểm đều thỏa mãn: $y_0 = x_0 + 2$. Vậy 3 điểm thuộc đường thẳng $y = x + 2$.

HT 169. Cho hàm số $y = (m-3)x^3 - 4(m-3)x^2 - (m+1)x + m$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

<u>Giải</u>

Xét họ đường cong $y = (m-3)x^3 - 4(m-3)x^2 - (m+1)x + m$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm. Tương tự bài trên ta có hệ sau để xác định x_0, y_0

$$\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 + 1 = 0 & (1) \\ y_0 + 3x_0^3 - 12x_0^2 + x_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow y_0 = -3x_0^3 - 12x_0^2 - x_0 = -3(x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 + 1) - 4x_0 + 3 = -4x_0 + 3$

Ta chứng minh (1) có 3 nghiệm phân biệt:

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 1$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Có: $f(-1) = -3, f(0) = 1, f(1) = -3, f(5) = 21$

$f(-1).f(0) = -3 < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (-1;0) : f(x_1) = 0$

$f(0).f(1) = -3 < 0 \Rightarrow \exists x_2 \in (0;1) : f(x_2) = 0$

$f(1).f(5) = -63 < 0 \Rightarrow \exists x_3 \in (1;5) : f(x_3) = 0$

Vì $x_1 < x_2 < x_3$ nên phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy 3 điểm cố định thẳng hàng đều nằm trên đường thẳng $y = -4x + 3$

HT 170. Cho hàm số $y = mx^3 + (1-m)x$. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ sao cho không có đường cong nào của họ đồ thị đi qua.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cần tìm. Khi đó phương trình sau với m là ẩn:

$y_0 = mx_0^3 + (1-m)x_0$ (1) vô nghiệm.

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow y_0 - x_0 = m(x_0^3 - x_0)$ (2).

Ta có: (2) vô nghiệm khi và chỉ khi hệ sau thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_0^3 - x_0 = 0 \\ y_0 - x_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \end{array}\right. \\ y_0 \neq x_0 \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm nằm trên 3 đường thẳng: $x = 0, x = -1, x = 1$ bỏ đi 3 điểm $A(0;0), B(1;1), C(-1;-1)$

HT 171. Cho hàm số $y = x^3 - m^3x^2 + 2mx + m^2 - 1$. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị hàm số không qua với mọi m.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm. Khi đó phương trình sau với m là ẩn:

$y_0 = x_0^3 - m^3x_0^2 + 2mx_0 + m^2 - 1$ (1) vô nghiệm

Ta viết lại: $m^3x_0^2 - m^2 - 2mx_0 + y_0 + 1 - x_0^3 = 0$ (2) vô nghiệm

Nếu $x_0 \neq m$ thì (2) là phương trình bậc 3. Ta biết rằng mọi phương trình bậc 3 đều có ít nhất 1 nghiệm. Vì thế để (2) vô nghiệm thì $x_0 = 0$

Với $x_0 = 0$ thì (2) trở thành: $-m^2 + y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = y_0 + 1$ (3)

Để (3) vô nghiệm $y_0 + 1 < 0 \Leftrightarrow y_0 < -1$. Vậy tập hợp các điểm là nửa đường thẳng: $x = 0$ với $y < -1$.

HT 172. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ sao cho đồ thị không qua với mọi m.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm. Khi đó phương trình sau với m là ẩn:

$y_0 = x_0^3 + 2(m-1)x_0^2 + (m^2 - 4m + 1)x_0 - 2(m^2 + 1)$ (1) vô nghiệm.

Viết lại (1) thành: $(x_0 - 2)m^2 + 2x_0(x_0 - 2)m + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 - 2 - y_0 = 0$ (2).

Xét các khả năng sau:

Trường hợp 1: $x_0 \neq 2$. Khi đó (2) vô nghiệm khi:

$\Delta' = x_0^2(x_0 - 2)^2 - (x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 - 2 - y_0)(x_0 - 2) < 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(x_0^3 - 2x_0^2 - x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 + 2 + y_0) < 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(-x_0 + y_0 + 2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 - 2 < 0 \\ -x_0 + y_0 + 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 - 2 > 0 \\ -x_0 + y_0 + 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

HT 173. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}\ (C)$. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm A,B phân biệt sao cho ba điểm $A,B,I(0;-1)$ thẳng hàng đồng thời thỏa mãn: $IA.IB=4$.

Giải

Do $A,B,I(0;-1)$ thẳng hàng nên A,B nằm trên đường thẳng Δ qua $I(0;-1)$. Do A,B thuộc đồ thị hàm số (C) nên A,B là giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $\Delta: y=kx-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ ta có:

$$\frac{2x-1}{x-1}=kx-1\Leftrightarrow kx^2-(k+3)x+2=0\ (*);(x\neq 1)$$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=k^2-2k+9>0\Leftrightarrow k\neq 0\\ k-(k+3)+2\neq 0\end{cases}$$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ do A,B thuộc Δ nên $y_1=kx_1-1;y_2=kx_2-1$

Ta có: $IA.IB=4\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+kx_1^2}.\sqrt{x_2^2+kx_2^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{|x_1x_2|}(k^2+1)=4$

Theo Viet ta có: $x_1x_2=\dfrac{2}{k}$ thay vào ta được: $\left|\dfrac{2}{k}\right|(k^2+1)=4\Leftrightarrow k=\pm 1$

Với $k=1$ ta được: $A\left(2-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right);B\left(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$

Với $k=-1$ ta được: $A\left(1-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right);B\left(1+\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$

HT 174. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}\ (C)$. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng MN, biết $M(-3;0),N(-1;-1)$.

Giải

Phương trình đường thẳng MN: $x+2y+3=0$

Xét hai điểm A, B trên đồ thị (C), ta có: $A\left(a;2-\dfrac{6}{a+1}\right),B\left(b;2-\dfrac{6}{b+1}\right),a,b\neq -1$

Gọi $I\left(\dfrac{a+b}{2};2-\dfrac{3}{a+1}-\dfrac{3}{b+1}\right)$ là trung điểm của đoạn AB

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases} AB \perp MN \\ I \in MN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ I \in MN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a - \dfrac{3}{a+1} + \dfrac{3}{b+1} = 0 \\ \dfrac{b+a}{2} - \dfrac{6}{a+1} - \dfrac{6}{b+1} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, $A(2;0);B(0;-4)$ hoặc $B(2;0);A(0;-4)$

CÁC BÀI TỔNG HỢP

HT 175. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-2}\ (C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến tại hai điểm đó của đồ thị hàm số song song với nhau.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d với đồ thị (C) là:

$\dfrac{2x+3}{x-2} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-6)x - 2m - 3 = 0\,(1)$ ($x = 2$ không là nghiệm của phương trình)

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $y'(x_1) = y'(x_2)$ hay $x_1 + x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ \dfrac{6-m}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

HT 176. Cho hàm số $y = \dfrac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \dfrac{1}{3}\ (C_m)$. Gọi A là giao điểm của (C_m) với trục tung. Tìm m sao cho tiếp tuyến của (C_m) tại A tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{3}$.

Giải

Ta có: $A\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$ và $y' = 4x^2 - 2(2m+1)x + m + 2$. Suy ra $y'(0) = m + 2$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại A là $d: y = (m+2)x + \dfrac{1}{3}$. Đường thẳng d cắt Ox tại $B\left(\dfrac{-1}{3m+6}; 0\right)$.

Khi đó, diện tích tam giác tạo bởi d với hai trục tọa độ là:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\left|\frac{-1}{3m+6}\right| = \frac{1}{18\left|m+2\right|}$$

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{1}{18\left|m+2\right|} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left|m+2\right| = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{13}{6} \\ m = -\dfrac{11}{6} \end{array}\right.$

HT 177. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 2mx - 1\ (C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $A(1;0), B$ và C sao cho $k_1 + k_2 = BC.\sqrt{5}$ trong đó k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến tại B, C của đồ thị hàm số (C).

<u>Giải</u>

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với Ox :

$$x^3 - 2mx^2 + 2mx - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 + (1-2m)x + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1-2m)x + 1 = 0\ (*) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Tức là phương trình: $x^2 + (1-2m)x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\ 1 + (1-2m) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -\dfrac{1}{2} \\ m \geq \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\dfrac{1}{2} \\ m \geq \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Giả sử $B(x_1;0), C(x_2;0)$

Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình (*) nên theo định lý Viet ta có:

$x_1 + x_2 = 2m - 1$ và $x_1.x_2 = 1$

Ta có: $BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2} = \sqrt{4m^2 - 4m - 3}$

Mặt khác: $k_1 + k_2 = 3x_1^2 - 4mx_1 + 2m + 3x_2^2 - 4mx_2 + 2m$

$$= 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 4m(x_1 + x_2) + 4m = 4m^2 - 4m - 3$$

Theo giả thiết ta có: $k_1 + k_2 = BC\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 = \sqrt{5(4m^2 - 4m - 3)}$

$\Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 5$ Vì $4m^2 - 4m - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1\ (t/m) \\ m = 2\ \ (t/m) \end{array}\right.$$

KL: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$

HT 178. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m\ \ (C_m)$. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng các hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại A, B, C bằng 3.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là:

$$x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0\ (1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0\ (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0, f(x) = x^2 - 2x + m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3(*)$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (2). Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases} (**), f'(x) = 3x^2 - 6x + m$

$\Leftrightarrow -3m = -6 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn (*))

KL: $m = 2$

HT 179. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}\ (C)$ Lập phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C) biết tiếp tuyến cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng 17π, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Giải

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0+3}{x_0-1}\right) \in (C)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến của d tại M là $y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Tiếp tuyến d cắt với tiệm cận đứng tại $A\left(1; \dfrac{x_0+7}{x_0-1}\right)$

Tiếp tuyến d cắt với tiệm cận ngang tại $B\left(2x_0 - 1; 1\right)$

Vì tam giác IAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB:

$$R = \frac{AB}{2} = \sqrt{(x_0-1)^2 + \frac{16}{(x_0-1)^2}}$$

Theo giả thiết ta có: $S = 17\pi \Leftrightarrow R^2\pi = 17\pi \Leftrightarrow (x_0-1)^4 - 17(x_0-1)^2 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \\ x_0 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow$ 4 tiếp tuyến: $\left[\begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = -4x - 3 \\ y = -4x + 13 \\ y = -x + 6 \end{array}\right.$

HT 180. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ $(m \neq 1)$ (1). Gọi k_1 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành. Gọi k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\left|k_1 + k_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành là $x = -m$

Hệ số góc của tiếp tuyến:

Tại điểm có hoành độ $x = -m$ là $k = \dfrac{1}{1-m}$

Tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $k_2 = \dfrac{1-m}{4}$

Ta có: $\left|k_1 + k_2\right| = \left|\dfrac{1}{1-m} + \dfrac{1-m}{4}\right| = \left|\dfrac{1}{1-m}\right| + \left|\dfrac{1-m}{4}\right| \geq 1, \forall m \neq 1$

Đẳng thức xảy ra khi: $\dfrac{1}{\left|1-m\right|} = \dfrac{\left|1-m\right|}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - m = 2 \\ 1 - m = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Vậy: $\left|k_1 + k_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $m \in \{-1; 3\}$

HT 181. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x - \dfrac{2}{3}$ (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ $x = 2$. Tìm các giá trị của tham số m để tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + \dfrac{9m+5}{3}$

Giải

Ta có $y(2) = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow M\left(2; -\dfrac{4}{3}\right)$

Tiếp tuyến Δ với (C) tại M có phương trình:

$y = y'(2)(x-2) - \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3(x-2) - \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \dfrac{14}{3}$

Ta có: $\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = -3 \\ \dfrac{9m+5}{3} \neq \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Kết luận: $m = -1$

HT 182. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$ Viết phương trình đường thẳng $d_1; d_2$ đi qua giao điểm I của hai tiệm cận và cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt là các đỉnh của một hình chữ nhật biết đường chéo hình chữ nhật có độ dài bằng $\sqrt{30}$.

Giải

Do $I(1;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số. Giả sử d_1 cắt (C) tại A, B; d_2 cắt (C) Tại C và D thì I là trung điểm của AB và CD. Do đó, ACBD là hình bình hành. Để ACBD là hình chữ nhật thỏa mãn đề bài thì $AB = CD = \sqrt{30}$

Gọi d_1 là đường thẳng qua I có hệ số góc là k

Phương trình đường thẳng $d_1 : y = k(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = kx - k + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là: $\frac{x+2}{x-1} = kx - k + 1$

$\Leftrightarrow kx^2 - 2kx + k - 3 = 0$ (1). Để d_1 cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1 \Leftrightarrow k > 0$

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{k-3}{k} \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} y_1 = kx_1 - k + 1 \\ y_2 = kx_2 - k + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ y_1y_2 = k^2x_1x_2 - k(k-1)(x_1 + x_2) + (k-1)^2 = 1 - 3k \end{cases}$

Để $AB = \sqrt{30}$ thì:

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 30 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - 4x_1x_2 - 4y_1y_2 = 30$

$\Leftrightarrow 12k^2 - 30k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \vee k = \frac{1}{2}$

Vậy, $d_1 : 2x - y - 1 = 0; d_2 : x - 2y + 1 = 0$ hoặc ngược lại

HT 183. Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ (1), m là tham số. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại M có hoành độ $x = -1$, cắt đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 2$ theo 1 dây cung AB có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $y'(-1) = 3 - m$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1; 2m-2)$ là:

$\Delta : y = (3-m)(x+1) + 2m - 2 = (3-m)x + m + 1 \Leftrightarrow (3-m)x - y + m + 1 = 0$

Để $\Delta \cap (C)$ thì $d(I, \Delta) < 2$. Nhận thấy dây cung AB nhỏ nhất khi $d(I, \Delta)$ lớn nhất

$d(I, \Delta) = \frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2 + 1}}$

Ta có: $d(I, \Delta) = \frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}} = \frac{|(3-m)+1|}{\sqrt{(3-m)^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}}$

$d(I, \Delta) \leq \sqrt{2} < R$

Ta có tiếp tuyến luôn cắt đường tròn (C) hai điểm phân biệt.

AB min $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=2$

Kết luận: $m=2$

HT 184. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}\ (C)$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại các điểm A, B phân biệt sao cho trọng tâm G của tam giác OAB cách đường thẳng d một khoảng bằng $\sqrt{2}$ (với O là gốc tọa độ).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+2}{2x-1}=x+m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+2(m-1)x-m-2=0, x\neq\dfrac{1}{2}$

Đường thẳng d cắt (C) tại A, B phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ g(\frac{1}{2})\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2+2(m+2)=m^2+5>0\\ \frac{1}{2}+m-1-m-2\neq 0\end{cases}\quad \forall m\in\mathbb{R}$

Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của $g(x)=0 \Rightarrow A(x_1;x_1+m)$ và $B(x_2;x_2+m)$

Điều kiện $O\notin d \Rightarrow m\neq 0 \Rightarrow$ trọng tâm $G\left(\dfrac{1-m}{3};\dfrac{1+m}{3}\right)$

Ta có: $d(G,d)=\dfrac{\left|\frac{1-m}{3}-\frac{1+m}{3}+m\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|m|}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-6\end{array}\right.$

HT 185. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+1(1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt $P(0;1),M,N$ sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ với $O(0;0)$.

Giải

(C) có hai điểm cực trị $A(1;1),B(2;0)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng $AB: x+y-2=0$. $S_{\Delta ABN}=\dfrac{1}{2}d(N,AB).AB=3\Leftrightarrow d(N,AB)=3\sqrt{2}$

Gọi d là đường thẳng đi qua N và $d//AB$. Phương trình đường thẳng d có dạng:

$x+y+c=0\Rightarrow d(A,d)=d(N,AB)\Leftrightarrow \dfrac{|c+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=4\\ c=-8\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}N(0;-4)(l)\\ N(3;5)\end{array}\right.$

Với $N(3;5)$ giả sử $M(x_0;y_0)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Do tiếp tuyến đi qua N nên ta có: $5=(6x_0^2-18x_0+12)(3-x_0)+2x_0^3-9x_0^2+12x_0-4$

$\Leftrightarrow (x_0-3)^2(4x_0-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=3\,(loai, vi\,N\neq M)\\ x_0=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$ Vậy, $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{25}{32}\right)$

TUYỂN TẬP ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ NĂM 2009

HT 186. **(ĐH A – 2009)** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho tam giác *OAB* cân tại gốc tọa độ *O*.

Giải

Ta có, ΔOAB vuông cân tại O suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_o;y_o)$, ta có: $\frac{-1}{(2x_o+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

TH1: Với $x_0 = -1, y_0 = 1$ Phương trình tiếp tuyến $y = -x$ (loại vì đi qua gốc tọa độ *O* nên không tồn tại ΔOAB)

TH2: $x_0 = -2; y_0 = 0$ Phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2 (t/m)$

KL: $y = -x - 2$

HT 187. **(ĐH B – 2009)** Cho hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2$ (1). Với giá trị nào của m, phương trình $x^2\left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt. *Đ/s:* $0 < m < 1$

HT 188. **(ĐH D – 2009)** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1; x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ Phương trình trở thành: $t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3m + 1$

Yêu cầu bài toán tương đương với: $\begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 1, m \neq 0$

HT 189. **(ĐH A – 2010)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, khác 1.

Kí hiệu, $g(x) = x^2 - x - m; x_1 = 1; x_2$ và x_3 là các nghiệm của (*).

Yêu cầu bài toán khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_2^2 + x_3^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 1$ và $m \neq 0$

HT 190. **(ĐH B – 2010)** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (*O* là gốc tọa độ).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(-2x+m)$ (do $x = -1$ không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1 - m = 0$ (1)

$\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m, suy ra đường thẳng $y = -2x + m$ luôn cắt đồ thị *(C)* tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi m

Gọi $A(x_1; y_2), B(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (1): $y_1 = -2x_1 + m$ và $y_2 = -2x_2 + m$

Ta có: $d_{(O,AB)} = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$ và $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2} = \frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB.d_{(O,AB)} = \frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4}$, suy ra: $\frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \pm 2$

HT 191. **(D – 2010)** Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$ Đ/s: $y = -6x + 10$

HT 192. **(A – 2011)** Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$ (C). Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt *A* và *B*. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại *A* và *B*. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

<u>Giải</u>

Hoành độ giao điểm của $d: y = x + m$ và *(C)* là nghiệm của phương trình: $x + m = \dfrac{-x+1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1) = -x+1$ (vì $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (*)

$\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt với mọi m

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (*), ta có:

$$k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1\right]^2}$$

Theo định lý Viet, suy ra: $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \le -2$

Suy ra: $k_1 + k_2$ lớn nhất bằng -2, khi và chỉ khi $m = -1$.

HT 193. **(B – 2011)** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1) (với m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị *A, B, C* sao cho *OA = BC*; trong đó *O* là gốc tọa độ, *A* là điểm cực trị thuộc trục tung, *B* và *C* là hai điểm cực trị còn lại.

<u>Giải</u>

$$y'_{(x)} = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$$

$$y'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \ (1) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > -1$ (*)

Khi đó: $A(0;m), B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right), C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$

Suy ra: $OA = BC \Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn (*)). Vậy giá trị cần tìm: $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

HT 194. **(D – 2011)** Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ *A* và *B* đến trục hoành bằng nhau.

<u>Giải</u>

Gọi $d: y = kx + 2k + 1$, suy ra hoành độ giao điểm của d với (C) là nghiệm của phương trình:

$kx + 2k + 1 = \dfrac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(kx + 2k + 1)$ (do $x = -1$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0$ (1).

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B,$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} k < 3 - 2\sqrt{2} \\ k > 3 + 2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} (*)$$

Khi đó, $A(x_1; kx_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$, x_1, x_2 là nghiệm của (1).

$d_{(A,Ox)} = d_{(B,Ox)} \Leftrightarrow \left|kx_1 + 2k + 1\right| = \left|kx_2 + 2k + 1\right|$

$\Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0$ (do $x_1 \neq x_2$)

Áp dụng định lý Viet đối với (1), suy ra: $(1 - 3k) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$ (thỏa mãn (*))

Vậy giá trị cần tìm: $k = -3$

HT 195. (A,A1 – 2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (*)

Các điểm cực trị của đồ thị hàm số $A(0; m^2), B\left(-\sqrt{m+1}; -2m - 1\right), C\left(\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right)$ và $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right)$

Ta có: $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0.$ Kết hợp (*), ta được $m = 0$

Đ/s: $m = 0$

HT 196. (B – 2012) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ $(1), m$ là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 48.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$

Các điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A\left(0; 3m^3\right); B\left(2m; -m^3\right)$

Suy ra: $OA = 3\left|m^3\right|$ và $d_{(B,OA)} = 2\left|m\right|$

$S_{\Delta OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m = \pm 2 (t / m(*))$

Đ/s: $m = \pm 2$

HT 197. (D – 2012) Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ $(1), m$ là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ sao cho: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1.$

Giải

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 13m^2-4>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \vee m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

Ta có: $x_1+x_2=m$ và $x_1x_2=1-3m^2$; Do đó, $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow 1-3m^2+2m=1$

$\Leftrightarrow m=0 \vee m=\dfrac{2}{3}$ So sánh điều kiện (*) ta được: $m=\dfrac{2}{3}$

Đ/s: $m=\dfrac{2}{3}$

HT 198. (A,A1 – 2013) Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Giải

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m$

Hàm số *(1)* nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\le 0, \forall x>0$

$\Leftrightarrow m\le x^2-2x, \forall x>0$

Xét: $f(x)=x^2-2x$ với $x>0$. Ta có: $f'(x)=2x-2; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên (nhớ lập nhé) ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m\le -1$

Đ/s: $m\le -1$

HT 199. (B – 2013) Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A, B* sao cho đường thẳng *AB* vuông góc với đường thẳng $y=x+2$.

Giải

Ta có: $y'=6x^2-6(m+1)x+6m; y'=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=m$

Điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $m\ne 1$

Ta có: 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số khi đó $A(1;3m-1); B(m;-m^3+3m^2)$.

Hệ số góc của đường thẳng AB là $k=-(m-1)^2$

Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1$

$\Leftrightarrow m=0 \vee m=2$. Vậy giá trị m cần tìm $m=0; m=2$

HT 200. (D – 2013) Cho hàm số $y=2x^3-3mx^2+(m-1)x+1$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đường thẳng $y=-x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số *(1)* với đường thẳng $y=-x+1$ là:

$$2x^3-3mx^2+(m-1)x+1=-x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3mx+m=0\ (*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{8}{9} \end{array}\right.$$

Đ/s: $m < 0; m > \dfrac{8}{9}$

UPDATING………………